

НАСЛЕДОВАНИЕ ГИПЕРГРАНЕЙ В ЗАДАЧАХ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

А.Н. Исаченко, Я.А. Исаченко

Белорусский государственный университет

г. Минск, Беларусь

E-mail: isachen@bsu.by, yarais@mail.ru

Рассматривается наследование гиперграней перестановочного многогранника циклическим перестановочным многогранником. Приводится одно из семейств наследуемых гиперграней. Уточняется оценка для числа гиперграней циклического перестановочного многогранника на основе ранее полученных результатов.

Ключевые слова: полиэдральная комбинаторика, многогранник, гипергрань, перестановка, наследование.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу

$$\min_{\pi \in C_n} \sum_{i=1}^n a_{\pi(i)} b_i \quad (1)$$

Здесь C_n – множество циклических перестановок элементов множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ – множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $b_1 < b_2 < \dots < b_n$. Полиэдральный подход для задачи (1), основан на построении системы линейных неравенств для циклического перестановочного многогранника

$$M(C_n) = \text{conv}\{a(\pi) = (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n)}) \mid \pi \in C_n\},$$

и описании его характеристик.

Ранее установлено [1], что $\dim M(C_n) = n-1$ при $n \geq 4$ и $\text{vert} M(C_n) = \{a(\pi) \mid \pi \in C_n\}$, определены отдельные семейства гиперграней многогранника $M(C_n)$.

В работе [2] введено понятие наследуемой грани. Пусть M_1, M_2 – многогранники размерности $d > 2$, причем $\text{vert} M_1 \subset \text{vert} M_2$, а G есть m -мерная грань многогранника M_1 ($1 \leq m < d$). Назовем G наследуемой гранью (относительно многогранника M_2), если существует грань F многогранника M_2 такая, что $\dim G = \dim F$ и $\text{vert} G \subseteq \text{vert} F$. Грань F назовем исходной для G . Ясно, что наследуемая грань определяется любой гиперплоскостью, определяющей исходную грань.

Как известно [3], для перестановочного многогранника $M(S_n)$ задающая его полная неприводимая система имеет вид

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i,$$

$$\sum_{i \in \omega} x_i \geq \sum_{j=1}^{|\omega|} a_j, \forall \omega \subset N, |\omega| \leq n-1 \quad (2)$$

Поскольку для перестановочного многогранника и многогранника циклических перестановок выполняются соотношения $\dim M(C_n) = \dim M(S_n)$, $\text{vert} M(C_n) \subset \text{vert} M(S_n)$, то возникает вопрос: какие из гиперграней перестановочного многогранника наследуются многогранником циклических перестановок? Или эквивалентно: какие из неравенств системы (2) входят в полную неприводимую систему, задающую многогранник $M(C_n)$?

В [2,4,5] установлено, что при $n \geq 5$ для $\omega \subset \{2, 3, \dots, n\}$, $|\omega|=1$, и для $\omega \subset \{3, 4, \dots, n\}$, $|\omega|=2$, соответствующие неравенства из (2) гиперплоскости определяют наследуемые относительно $M(S_n)$ гиперграни многогранника $M(C_n)$. Приведены нижние оценки для числа гиперграней.

СЕМЕЙСТВО ГИПЕРГРАНЕЙ ДЛЯ $|\omega|=3$

Рассмотрим неравенства для $|\omega|=3$ из системы (2).

Если $\omega = \{1, 2, 3\}$, то соответствующая неравенству гипергрань

$$H(1, 2, 3) = \{x \in E^n \mid x_1 + x_2 + x_3 = a_1 + a_2 + a_3\}$$

имеет пустое пересечение с многогранником $M(C_n)$, так как для $a(\pi) \in H(1, 2, 3)$, получим $\pi \notin C_n$.

Если $\omega = \{1, 2, i\}$, $i \geq 4$, то $H(\omega) \cap M(C_n) \neq \emptyset$. При этом любая точка $a(\pi) \in H(\omega)$, $\pi \in C_n$, должна удовлетворять либо равенствам $x_1 = a_2$, $x_2 = a_3$, $x_i = a_1$, либо равенствам $x_1 = a_3$, $x_2 = a_1$, $x_i = a_2$. Следовательно $\dim H(\omega) \cap M(C_n) \leq n-3$.

Аналогично, если $\omega = \{1, 3, i\}$ ($\omega = \{2, 3, i\}$), $i \geq 4$, то $H(\omega) \cap M(C_n) \neq \emptyset$. При этом для $a(\pi) \in H(\omega)$, $\pi \in C_n$, выполняются либо равенства $x_1 = a_2$, $x_3 = a_1$, $x_i = a_3$, ($x_2 = a_1$, $x_3 = a_2$, $x_i = a_3$), либо равенства $x_1 = a_3$, $x_3 = a_2$, $x_i = a_1$ ($x_2 = a_3$, $x_3 = a_1$, $x_i = a_2$). То есть $\dim H(\omega) \cap M(C_n) \leq n-3$.

Теорема 1. При $n \geq 5$ каждая гиперплоскость

$$H(i, j, k) = \{x \in E^n \mid x_i + x_j + x_k = a_1 + a_2 + a_3\}, i \in \{1, 2, 3\}, j, k \in \{4, \dots, n\}, j < k, \quad (3)$$

определяет гипергрань многогранника $M(C_n)$.

Доказательство. Согласно определению, множество называется k -мерным, если оно содержит $k+1$ аффинно независимых точек. Поскольку $\dim M(C_n) = n-1$, то для доказательства необходимо указать $n-1$ аффинно независимые точки многогранника $M(C_n)$, принадлежащие гиперплоскости (3).

Если $n=5$, то в (3) входит три гиперплоскости, причём число точек принадлежащих пересечению $M(C_5)$ с каждой из них равно четырем. Непосредственной про-

веркой легко убедиться, что каждое из этих множеств является аффинно независимым, что влечёт справедливость теоремы для $n=5$.

Пусть $n \geq 6$ и $i=1$. Рассмотрим следующее множество $n-1$ точек, принадлежащих $M(C_n)$..

$(a_2, a_j, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_3, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_1, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_k)$
 $(a_2, a_j, a_5, a_6, a_4, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_3, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_1, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_k)$
 $(a_2, a_j, a_4, a_6, a_7, a_5, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_3, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_1, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_k)$
 $\dots$
 $(a_2, a_j, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j+1}, a_{j+2}, a_3, a_{j-2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_1, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_k)$
 $\dots$
 $(a_2, a_j, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_3, a_{j+2}, \dots, a_{k+1}, a_{k+2}, a_1, a_{k-1}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_k)$
 $\dots$
 $(a_2, a_j, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_3, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_1, a_{k+2}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n-2}, a_k)$
 $(a_2, a_n, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_3, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_1, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_k, a_j)$
 $(a_2, a_n, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_3, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_j, a_k)$
 $(a_2, a_k, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_3, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_j)$
 $(a_3, a_j, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_1, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_2, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_k)$
 $(a_3, a_k, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, a_2, a_{j+2}, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, a_1, a_{k+2}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_j)$

Учитывая тот факт, что множество точек $\{X_1, X_2, \dots, X_{k+1}\}$ является аффинно независимым тогда и только тогда, когда множество $\{X_2 - X_1, \dots, X_{k+1} - X_1\}$ является линейно независимым, вычтем по координатно первую точку из всех остальных точек множества. Затем удалим $(n-2)$ -ую и $(n-1)$ -ую координаты, а первую, вторую, j -ую и k -ую координаты переставим в конец. Результат запишем в виде матрицы $(n-2) \times (n-2)$ со строками:

$a_5 - a_4$	$a_6 - a_5$	$a_4 - a_6$	0	...	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$a_6 - a_5$	$a_7 - a_6$	$a_5 - a_7$	...	0	0	0	0	0	0	0	0
.....												
0	0	0	0	...	$a_{n-2} - a_{n-3}$	$a_{n-1} - a_{n-2}$	$a_{n-3} - a_{n-1}$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	...	0	$a_{n-1} - a_{n-2}$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	...	0	0	$a_j - a_k$	0	$a_n - a_j$	0	0	0
0	0	0	0	...	0	0	0	0	$a_n - a_j$	$a_1 - a_3$	$a_3 - a_1$	
0	0	0	0	...	0	0	$a_j - a_k$	0	$a_k - a_j$	$a_1 - a_3$	$a_3 - a_1$	
0	0	0	0	...	0	0	0	$a_3 - a_2$	0	$a_1 - a_3$	$a_2 - a_1$	
0	0	0	0	...	0	0	0	$a_3 - a_2$	0	$a_2 - a_1$	$a_1 - a_3$	

Определитель данной матрицы равен

$$(a_{j+1} - a_{j-1})(a_{k+1} - a_{k-1}) \prod_{p=4}^{j-2} (a_{k+1} - a_k) \prod_{l=j+1}^{k-2} (a_{l+1} - a_l) \prod_{m=k+1}^{n-2} (a_{m+1} - a_m) \times \\ \times 2a_1(a_1 - a_3)(2a_n - a_j - a_k).$$

В силу неравенств $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ определитель отличен от нуля. Следовательно, полученное множество разностей является линейно независимым. Последнее влечёт аффинную независимость исходного множества точек.

Случаи $i=2, i=3$ доказываются аналогично.

Следствие. Каждая гипергрань $H(i, j, k) \cap M(C_n)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j, k \in \{4, \dots, n\}$, $j < k$, $n \geq 5$, циклического перестановочного многогранника $M(C_n)$ является наследуемой относительно перестановочного многогранника $M(S_n)$.

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ЧИСЛА ГИПЕРГРАНЕЙ

Рассмотрим число $f(M(C_n))$ гиперграней многогранника $M(C_n)$.

Теорема 2. Для числа гиперграней $f(M(C_n))$ многогранника $M(C_n)$ при $n \geq 5$ справедливо неравенство

$$f(M(C_n)) \geq \begin{cases} ((k-1)!)^2 + 8k^2 - 24k + 20, & n = 2k, \\ (k-1)!k! + 8k^2 - 17k + 10, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Доказательство. В работе [5] получена следующая нижняя оценка при $n \geq 4$:

$$f(M(C_n)) \geq \begin{cases} ((k-1)!)^2 + 2k^2 - 3k + 2, & n = 2k, \\ (k-1)!k! + 2k^2 - k + 1, & n = 2k + 1. \end{cases}$$

Учитывая теорему 1, получим справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Исаченко, Я.А. Применение полиэдрального подхода к задаче на циклических перестановках / Я.А. Исаченко // Современные информационные компьютерные технологии: Сб. науч. ст., ч. 2. Гродно : ГрГУ, 2008. С.203-206.
- [2] Исаченко, Я.А. О некоторых гипергранях многогранника циклических перестановок / Я.А. Исаченко // Технологии информатизации и управления: Сб. науч. ст.. Минск : БГУ, 2009. С. 16-19.
- [3] Емеличев, В.А., Ковалёв, М.М., Кравцов, М.К. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников) / В.А. Емеличев, М.М. Ковалёв, М.М. Кравцов. М.: Наука, 1981. 344 с.
- [4] Исаченко, Я.А. Об одной задаче управления на циклических перестановках / Я.А. Исаченко // Управление информационными ресурсами: материалы седьмой международной научно-практической конференции (Минск, 25 ноября 2009 г.). Мн.: Акад.упр.при Президенте Респ.Беларусь, 2009. С. 68-69.
- [5] Исаченко, А.Н., Исаченко, Я.А. Полиэдральные аспекты оптимизационной задачи на циклических перестановках / А.Н. Исаченко, Я.А. Исаченко // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. С. 187-190.