УПРУГИЙ СПИН ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

О.Л. Швед

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Сурганова 6, 220012 Минск, Беларусь
swed@newman.bas-net.by

В геометрически нелинейных моделях среды, испытывающей пластические деформации, обычно упругая деформация вводится упрощенно и упругий поворот игнорируется. Это приводит, например, к существенному расхождению в определении разгрузочной конфигурации при простом сдвиге с альтернативной моделью среды, в которой строго соблюдаются требования нелинейной упругости. Предполагается справедливой декомпозиция Крёнера–Ли транспонированного градиента общей деформации $\overset{0}{\nabla}\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p$ на упругую $\mathbf{F}_e$ и пластическую $\mathbf{F}_p$ составляющие. Согласно полярному разложению выполняется $\mathbf{F}_e = \mathbf{V} \cdot \mathbf{O}^{\mathrm{T}} = \mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}$. Элемент среды может находиться либо в упругом (тогда выполняются соотношения нелинейной упругости), либо в пластическом, несжимаемом состояниях.

Определение 1. *Упругим спином называется кососимметричный тензор угловой скорости* $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{O}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{O} = -\mathbf{O}^{\mathrm{T}} \cdot \dot{\mathbf{O}}$ *собственно ортогонального тензора* $\mathbf{O}$ *(упругого поворота), сопровождающего упругую деформацию (точка сверху означает материальную производную).*

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{W}$ *— тензор вихря,* $\mathbf{D}$ *— тензор деформации вектора скорости,* L_i *— i-тый инвариант мер* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{V}$ $(\mathbf{F} = \mathbf{V}^2)$. *В упругом состоянии тензор* $\mathbf{\Omega}$ *определяется соотношением*

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} - (L_1 L_2 - L_3)^{-1}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} + L_1 L_3(\mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{D})). \quad (1)$$

Обозначим $\mathbf{T}$ — тензор напряжений Коши, $\mathrm{dev}\mathbf{T}$ — его девиатор, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ортонормированные собственные векторы $\mathbf{T}$, скаляр $э$ — потенциал напряжений (тензор Пиола $\mathbf{P} = \frac{\partial э}{\partial \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}}} = 2\frac{\partial э}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{G} = \mathbf{U}^2$), который образован добавлением к изотропному потенциалу Мурнагана анизотропных структур первой и второй степени. Определяющее уравнение для тензора $\mathbf{T} = L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{P}$ получается в виде $\mathbf{T} = 2L_3^{-1}\mathbf{F}_e \cdot \frac{\partial э}{\partial \mathbf{G}} \cdot \mathbf{F}_e^{\mathrm{T}}$.

Теорема 2. *Пусть справедливы два условия: величина спина* $\mathbf{\Omega}$ *в пластическом состоянии максимально близка к его величине в упругом состоянии и существует* $\varphi = \varphi(\mathbf{D})$ *— потенциал девиатора* $(\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{\Omega}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}}$. *Тогда, если выполняется второе условие, когда* $\mathbf{\Omega}$ *вычисляется по (1), то его значение не изменяется, в противном случае тензор* $\mathbf{\Omega}$ *в пластическом состоянии определяется соотношениями*

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + (L_1 L_2 - L_3)^{-1}(a d_4(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1) + b d_5(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) + c d_6(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2)),$$

$$a = V_4^2(V_1 - V_2) + V_5^2(V_1 + V_3) - V_6^2(V_2 + V_3) - (V_1 - V_2)(V_1 + V_3)(V_2 + V_3),$$

$$b = V_4^2(V_1 + V_2) + V_5^2(V_1 - V_3) - V_6^2(V_2 + V_3) - (V_1 + V_2)(V_1 - V_3)(V_2 + V_3),$$

$$c = -V_4^2(V_1 + V_2) + V_5^2(V_1 + V_3) + V_6^2(V_3 - V_2) - (V_1 + V_2)(V_1 + V_3)(V_3 - V_2),$$

$$d_4 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_2, \quad d_5 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_3, \quad d_6 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_3,$$

$$V_4 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_2, \quad V_5 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3, \quad V_6 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i = V_i, (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Следствие 1. *Теоремы 1, 2 дают возможность вычислять упругий поворот:* $\dot{\mathbf{O}} = -\mathbf{O} \cdot \mathbf{\Omega}$. *Выражения (1), (2) для тензора* $\mathbf{\Omega}$ *совпадают, если тензоры* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{V}$ *соосны.*

Литература

1. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.

2. *Швед О.Л.* Двойственное описание упругопластического процесса // Вестник БГУ. Сер. 1. 2007. № 2. С. 88–93.