

ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГОГО ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ

Е.Э. Старовойтова

Белорусский государственный университет транспорта
Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь

Рассмотрена задача о квазистатическом деформировании несимметричного трехслойного стержня с жестким наполнителем, имеющего ступенчатую нижнюю границу. Для описания кинематики пакета принята гипотеза "ломаной нормали": в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в более толстом жестком наполнителе нормаль остается прямой, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. На границах склейки слоев перемещения непрерывны. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Для описания нерегулярности нижней границы используется функция Хевисайда $H(x - x_0)$, где x_0 — координата сечения, в котором происходит ступенчатое изменение толщины второго слоя. Деформации малые.

Уравнения равновесия трехслойного стержня получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. В результате система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая равновесия трехслойного стержня с нерегулярной границей, в одной из областей имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= C_{21} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + \frac{1}{\beta_1} \left[\operatorname{sh}(\beta_1 x) \int (\gamma_{21} p + \gamma_{11}(qx + C_{11})) \operatorname{ch}(\beta_1 x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{ch}(\beta_1 x) \int (\gamma_{21} p + \gamma_{11}(qx + C_{11})) \operatorname{sh}(\beta_1 x) dx \right] = \\ &= C_{21} \operatorname{sh}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{ch}(\beta_1 x) - \frac{1}{\beta_1^2} \gamma_{21} p + \gamma_{11}(qx + C_{11}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \psi_1 dx - a_7 p \frac{x^3}{6} + a_1 q \frac{x^4}{24} + \frac{a_1 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\frac{\alpha_{11}}{\beta_1} \left[C_{21} \operatorname{ch}(\beta_1 x) + C_{31} \operatorname{sh}(\beta_1 x) - \frac{x}{\beta_1} (\gamma_{21} p + \gamma_{11} (\frac{1}{2} qx + C_{11})) \right] - \right. \\ &\quad \left. - a_7 p \frac{x^3}{6} + a_1 q \frac{x^4}{24} + \frac{a_1 C_{11}}{6} x^3 \right] + \frac{C_{41}}{2} x^2 + C_{51} x + C_{61}, \\ u_1(x) &= \gamma_{31} \psi_1 + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[-a_4 p \frac{x^2}{2} + a_7 q \frac{x^3}{6} + \frac{a_7}{2} C_{11} x^2 \right] + C_{71} x + C_{81}. \end{aligned}$$

В другой области решение будет иметь подобный вид, но с другими коэффициентами и константами интегрирования C_{21}, \dots, C_{28} .