

К ПРОБЛЕМЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН

С.А. Дутов, А.В. Зубов, А.Ю. Радченко, М.В. Стрекопытова

Санкт-Петербургский государственный университет, Библиотечная пл. 2, 198104 Старый Петергоф, Россия

`a_v_zubov@mail.ru`

Рассмотрим волновой процесс, определяемый векторной функцией единственного скалярного аргумента

$$u = u(\omega). \quad (1)$$

Считаем, что фаза ω волны (1) является функцией времени t и пространственных координат $x_1, \dots, x_n$: $\omega = \omega(t, x_1, \dots, x_n)$. Поверхность уровня

$$\omega = \gamma \quad (2)$$

называется волновой поверхностью или фронтом волны. Постоянная γ может принимать в уравнении (2), вообще говоря, произвольные вещественные значения. Система

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_1, \dots, x_n), \quad s = 1, \dots, n, \quad (3)$$

является системой дифференциальных уравнений лучей, если (2) является первым интегралом системы (3): имеет место тождество

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \sum_{s=1}^n f_s \frac{\partial \omega}{\partial x_s} = 0.$$

Теорема 1. Скорость распространения лучей, определяемая уравнениями (3), может быть разложена на две составляющие: нормальную составляющую V_H ,

$$V_H = -\frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\nabla \omega}{(\nabla \omega)^2},$$

и поперечную V_Π ,

$$V_\Pi = S \nabla \omega,$$

где S произвольная кососимметрическая матрица, элементы которой могут быть функциями $x_1, \dots, x_n$, а также зависеть от величины ω и ее частных производных. Система (3) может быть представлена в форме

$$\dot{X} = V_H + V_\Pi.$$

Нормальная составляющая скорости луча может быть отождествлена со скоростью распространения фронта волны. Если эта скорость совпадает со скоростью луча, то волна называется нормальной. Для нормальной волны выполняется соотношение

$$V_\Pi = 0.$$

Теорема 2. Если максимальная скорость распространения лучей постоянна и равна C_0 и достигается нормальной волной, то фаза нормальной волны удовлетворяет волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 = C_0^2 \sum_{s=1}^n \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_s} \right)^2 \quad (4)$$

и, наоборот, если фаза ω некоторой волны (1) удовлетворяет волновому уравнению (4), где C_0 – максимальная скорость распространения лучей этой волны, то волна (1) обязательно является нормальной.