НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

С.П. Ходос, Ф.Е. Ломовцев

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

khodos_svetlana@tut.by, lomovcev@bsu.by

В работе [1] функциональным методом энергетических неравенств исследована корректность в сильном смысле абстрактной задачи Коши для полного сингулярного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с зависящими от времени областями определения операторных коэффициентов, частным случаем которой является следующая начально-краевая задача. В области $G =]0,l[\times]0,T[$ переменных x и t рассматривается сингулярное гиперболическое уравнение в частных производных

$$u_{tt} + t^{-1}\left(b_1(x)u_{xt} + b_2(x)u_t\right) - \left(a(x)u_x\right)_x + b_3(x,t)u_t + a_1(x,t)u_x + a_2(x,t)u = f(x,t) \qquad (1)$$

с зависящими от времени граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \beta(t)u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \qquad (2)$$

и однородными начальными условиями

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in]0,l[. \qquad (3)$$

Здесь коэффициенты уравнения $a(x) \geqslant a_0 > 0$, $x \in [0,l]$, $b_1(0) = 0$, $b_1(l) \geqslant 0$, $a(x)$, $b_1(x) \in C^{(1)}[0,l]$, $b_2(x) \in C^{(2)}[0,l]$, $b_3(x,t)$, $a_i(x,t) \in C(\overline{G})$, $i = 1,2$, и граничных условий $\beta(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, $\beta(t) \in C^{(2)}[0,T]$ и для всех $\{x,t\} \in \overline{G}$ верны неравенства

$$2b_2(x) - b_1'(x) \geqslant 0, \quad a(x)b_1'(x) - a'(x)b_1(x) + 2a(x)b_2(x) \geqslant 0,$$

$$a'(x)b_2'(x) + a(x)b_2''(x) \leqslant 0, \; b_1(l)\beta^2(t) - 2b_2(l)\beta(t) - b_2'(l) \leqslant 0.$$

Теорема 1. *Если коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют указанным выше требованиям, то для любой функции $f \in L_2(G)$ начально-краевая задача (1)-(3) имеет единственное сильное решение $u \in E(G)$, для которого справедлива оценка*

$$\int_G |u_t(x,t)|^2\,dx\,dt + \int_0^T \left\|A^{1/2}(t)u\right\|^2 dt \leqslant c_1 \int_G |f(x,t)|^2\,dx\,dt, \quad c_1 > 0,$$

где гильбертово пространство $E(G)$ – замыкание множества всех функций $u \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих условиям (2) и (3), по норме левой части этой оценки и выражение

$$\left\|A^{1/2}(t)u\right\|^2 = (1+\beta(t))^{-1}\, a(l)\left(|u_x(l)|^2 + \beta(t)\,|u(l)|^2\right) + \int_0^l a(x)\,|u_x|^2\,dx.$$

Теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений абстрактной задачи Коши для неполного сингулярного гиперболического дифференциального уравнения второго порядка с не зависящими областями определения зависящих от времени операторных коэффициентов были доказаны в [2]. Такими уравнениями могут быть только уравнения в частных производных с не зависящими от времени граничными условиями.

Литература

1. *Ходос С.П.* Полное сингулярное гиперболическое дифференциально-операторное уравнение второго порядка с переменными областями определения // Сборник работ 65-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ. Мн., 2008 (в печати).

2. *Гаврилова Н.И., Юрчук Н.И.* Задача Коши для дифференциально-операторных уравнений типа Эйлера — Пуасонна — Дарбу // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 5. С. 789–791.