СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ НАЧАЛЬНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Н.А. Хатимцов, Ф.Е. Ломовцев

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

Независимости 4,220050 Минск. Беларусь

nikita.mmf@gmail.com, lomovcev@bsu.by

В области $G =]0,l[\times]0,T[$ пременных x и t рассматривается гиперболическое уравнение

$$u_{tt} + a_1(x,t)u_{xt} - (a(x)u_x)_x + b_2(x,t)u_t + b_1(x,t)u_x + b_0(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

при нестационарных граничных

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \beta(t)u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

и нелокальных начальных условиях

$$u(x,0) - \mu\, u(x,T) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) - \mu\, u_t(x,T) = \psi(x), \quad |\mu| < 1. \tag{3}$$

Пусть банахово пространство $E(G)$ — замыкание множества всех функций $u \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих граничным условиям (2), по норме

$$\|u(x,t)\|_{E(G)} = \left[\sup_{t\in[0,T]} \left(\int_0^l |u_t(x,t)|^2\, dx + \left\|A^{1/2}(t)u\right\|^2 \right)\right]^{1/2},$$

$$\left\|A^{1/2}(t)u\right\|^2 = a(l)\left(1 + \int_0^l \frac{a(l)ds}{a(s)}\beta(t)\right)^{-1} \left(\int_0^l \frac{a(l)ds}{a(s)}\, |u_x(l)|^2 + \beta(t)\,|u(l)|^2\right) + \int_0^l a(x)\,|u_x|^2\, dx.$$

На основании проверки предположений полученных ранее теорем существования, единственности и устойчивости сильных решений абстрактной нелокальной задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка с переменными областями определения операторов доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $a(x) \in C^{(1)}[0,l]$, $a(x) \geqslant a_0 > 0$, $x \in [0,l]$; $a_1(x,t) \in C^{(0,1)}(\bar{G})$, $a_1(0,t)$, $a_1(l,t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$; $b_i(x,t) \in C(\bar{G})$, $i = \overline{0,2}$; $\beta(t) \in C^{(2)}[0,T]$, $\beta(t) \geqslant 0$, $\beta^{(j)}(0) = \beta^{(j)}(T)$, $j = 0,1$, *то для любых* $f \in L_2(G)$, $\varphi \in \tilde{W}_2^1(0,l)$ *и* $\psi \in L_2(0,l)$ *смешанная задача (1)–(3) имеет едиственные сильные решения* $u \in E(G)$, *для которых*

$$\|u(x,t)\|^2_{E(G)} \leqslant c_1 \left[\int_G |f(x,t)|^2\, dt + \left\|A^{1/2}(0)\varphi(x)\right\|^2 + \int_0^l |\psi(x)|^2\, dx\right], \quad c_1 > 0,$$

где гильбертово простанство $\tilde{W}_2^1(0,l)$ *— замыкание множества всех функций* $v \in W_2^2(0,l)$, *удовлетворяющих граничным условиям (2) при* $t = 0$, *по норме* $\langle|v|\rangle = \|A^{1/2}(0)v\|$.

Теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений второго порядка были доказаны в случае нелокальных начальных условий и постоянного оператора в [1] и локальных начальных условий и переменных областей определения операторов — в [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф07К–016).

Литература

1. *Чесалин В.И., Юрчук Н.И.* Задача Коши с нелокальными условиями для абстрактных уравнений Лява // Весці Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук 1973 № 6. С. 30–35.

2. *Ломовцев Ф.Е.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнениях второго порядка с переменной областью определения операторных коэфициентов//Дифференциальные уравнения 1992. Т. 28. № 5. С. 873–885.