УРАВНЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ С КОНВЕКЦИЕЙ И ПОГЛОЩЕНИЕМ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

С.А. Прохожий

Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Московский пр-т 33, 210036 Витебск, Беларусь
prokhozhy@tut.by

В области $S = \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ рассматривается задача Коши для уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}(x,t)u^m) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i(x,t)u^n) + c(x,t)u^k - d(x,t)u^p \tag{1}$$

с начальными данными

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

где $m > 1$, $p > \max\{m,n,k\}$; $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$, $d(x,t)$ — вещественные функции из пространства $C^{\alpha}_{loc}(\overline{S})$ ($0 < \alpha < 1$), $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0$ при $\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 > > 0$ ($\xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, N$), функция $d(x,t)$ положительна вне некоторого цилиндра $B_a \times [0, + +\infty)$, $u_0(x)$ — неотрицательная непрерывная функция, которая может иметь произвольный рост на бесконечности. Здесь и далее $B_a = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < a\}$, $0 < a < +\infty$.

Как хорошо известно, в силу вырождения уравнения (1) при $u = 0$ задача Коши (1), (2) может не иметь классического решения даже при гладких начальных данных, поэтому изучаются обобщенные решения этой задачи.

Целью работы является исследование вопросов существования и единственности решения задачи Коши (1), (2).

Уравнение (1) с коэффициентами $a_{ij}(x,t) = 1$ при $i = j$, $a_{ij}(x,t) = 0$ при $i \neq j$, $b_i(x,t) = 0$ ($i,j = 1, \ldots, N$) и $c(x,t) = 0$ рассматривалось, например, в [1].

Теорема 1. *Для любого $T > 0$ в слое $S_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$ существует обобщенное решение задачи (1), (2).*

Теорема единственности доказывается в предположении, что коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$, $c(x,t)$ и $d(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\lim_{r \to +\infty} \inf_{1 < \beta \leqslant p/m} r^{-2\beta/(\beta-1)} \int_0^T \int_{B_r \setminus B_a} d^{-1/(\beta-1)} |a_{ij}|^{\beta/(\beta-1)} dx\, dt = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{r \to +\infty} \inf_{1 < \beta \leqslant p/n} r^{-\beta/(\beta-1)} \int_0^T \int_{B_r \setminus B_a} d^{-1/(\beta-1)} |b_i|^{\beta/(\beta-1)} dx\, dt = 0, \tag{4}$$

$$\int_0^T \int_{B_r \setminus B_a} \frac{c(x,t)}{d(x,t)} dx\, dt \leqslant M r^N, \tag{5}$$

где M — некоторая положительная постоянная.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (3)-(5). Тогда обобщенное решение задачи (1), (2) единственно в произвольном слое S_T.*

Показана определенная точность полученных результатов.

Литература

1. *Гладков, А.Л.* Уравнение диффузии-абсорбции с переменным коэффициентом / А.Л. Гладков // Дифф. уравнения. – 2000. – Т. 32, № 12. – С. 42-47.