СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ ПРИ ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТЕ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦА

Д.А. Ляхов, Ф.Е. Ломовцев

Белгосуниверситет, физический факультет, механико-математический факультет

пр. Независимости 4, 220030 Минск. Беларусь

spiritptd@yahoo.com, lomovcev@bsu.by

В области $G =]0,l[\times]0,T[$ пременных x и t решается уравнение колебаний струны

$$u_{tt}(x,t) - a(t)u_{xx}(x,t) + b(x,t)u(x,t) = f(x,t), \quad \{x,t\} \in G, \tag{1}$$

при зависящих от времени граничных

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) + \beta(t)u(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in]0,l[. \tag{3}$$

Определение. Функция $u(x,t) \in L_2(G)$ называется *слабым решением* смешанной задачи (1) – (3) для заданных $f(x,t) \in L_2(G)$ и $u_0(x), u_1(x) \in L_2(0,l)$, если верно тождество

$$\int_G \{u(x,t)\overline{\varphi}_{tt}(x,t) - u(x,t)a(t)\overline{\varphi}_{xx}(x,t)\}\, dx\, dt = \int_G f(x,t)\overline{\varphi}(x,t)\, dx\, dt - \int_0^l u_0(x)\overline{\varphi_t}(x,0)\, dx +$$

$$+ \int_0^l u_1(x)\overline{\varphi}(x,0)\, dx \quad \forall \varphi \in \Phi = \{\varphi \in W_2^2(G) : \varphi \in (2),\ \varphi(x.T) = \varphi_t(x,T) = 0,\ x \in]0,l[\}.$$

Теорема 1. *Когда коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют следующим условиям:* $a(t)$, $\beta(t) \in C^2[0,T]$, $b(x,t) \in L_\infty(G)$, $a(t) \geqslant a_0 > 0$, $\beta(t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$, *тогда при любых* $f(x,t) \in L_2(G)$, $u_0(x)$, $u_1(x) \in L_2(0,l)$ *существуют единственные слабые решения* $u(x,t) \in L_2(G)$ *смешанной задачи (1) – (3), для которых*

$$\int_G |u(x,t)|^2\, dx\, dt \leqslant c_1 \left[\int_G |f(x.t)|^2\, dx\, dt + \int_0^l |u_0(x)|^2\, dx + \int_0^l |u_1(x)|^2\, dx \right], \quad c_1 > 0.$$

Идея доказательства. Обоснование существования слабых решений этой задачи состоит в применении проекционной теоремы Лионса, используя сглаживающие по x абстрактные операторы $A_\varepsilon^{-1}(t)$, $\varepsilon > 0$, из [1]. Единственность ее слабых решений устанавливается при помощи сглаживающих по t интегральных операторов J_δ^{-1}, $\delta > 0$, Юрчука Н.И. из [2].

Сильные решения уравнения колебаний струны при зависящем от времени коэффициенте $\beta(t)$ упругого закрепления конца изучались в работе [1]. В нашей работе исследуются его слабые решения для начальных данных $u_0(x) \in L_2(0,l)$, которые могут не принадлежать области определения $D(A^{1/2}(0)) = \{u \in W_2^1(0,l) : u(x) \in (2)$ при $t = 0\}$ квадратного корня $A^{1/2}(0)$ соответствующего оператора $A(0)$ как в [1].

Литература

1. *Ломовцев Ф.Е.* О необходимых и достаточных условиях однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнениях второго порядка с переменной областью определения операторных коэфициентов//Дифференц. уравнения 1992. Т. 28, № 5. С. 873-886.

2. *Юрчук Н.И.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений с зависящими от параметра операторными коэффициентами. II. Разрешимость и свойства решений. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 5. С. 859 870.