ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

С.Н. Даранчук

Гродненский государственный университет им. Я.Купалы, Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
daranchuk@tut.by

Для линейной дифференциальной системы в частных производных [1] и дифференциальной системы Якоби — Гессе [2] разработаны спектральные методы построения первых интегралов по их линейным частным интегралам. Нами получено обобщение этих методов для линейных систем в частных производных, возмущенных дифференциальными операторами с нелинейными координатными функциями специального вида,

$$\mathfrak{L}_j(x)\,y = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

где операторы $\mathfrak{L}_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n a_{\alpha i}(x)\partial_{x_i}$, $\mathfrak{L}_\beta(x) = \sum_{i=1}^n \big(a_{\beta i}(x) - x_i a_{\beta,n+1}(x)\big)\partial_{x_i}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = \overline{1,s}$, $0 \leqslant s \leqslant m < n$, $\beta = \overline{s+1,m}$, вещественные функции $a_{j\tau}\colon x \to \sum_{\xi=1}^n a_{j\tau\xi}x_\xi + a_{j\tau,n+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\tau = \overline{1,n}$ при $j = \overline{1,s}$, $\tau = \overline{1,n+1}$ при $j = \overline{s+1,m}$, причем $\sum_{i=1}^n \big|a_{\beta,n+1,i}\big| \neq 0$, $\beta = \overline{s+1,m}$.

Разработанным спектральным методом на основании собственных чисел и собственных векторов матриц $A_j = \big\|a_{j\tau\delta}\big\|$, $j = \overline{1,m}$, ($\delta = \overline{1,n+1}$ — номер строки, $\tau = \overline{1,n+1}$ — номер столбца, $a_{\alpha,n+1,\delta} = 0$, $\alpha = \overline{1,s}$, $\delta = \overline{1,n+1}$) в явном виде находятся первые интегралы или последние множители системы (1). Метод получен при условии перестановочности матриц A_j, $j = \overline{1,m}$, из которого следует якобиевость системы (1). Например, в случае простых вещественных собственных чисел имеет место (ср. с теоремой 1 из [1] и [2])

Теорема 1. *Пусть* ν^k, $k = \overline{1, m+1}$, *— общие вещественные собственные векторы перестановочных матриц* A_j, *соответствующие собственным числам* $\lambda_k^j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, m}$. *Тогда функция* $F\colon x \to \prod_{k=1}^{m+1} \left|\nu^k X\right|^{h_k}$ $\forall x \in \Omega, \Omega \subset \mathrm{D}(F)$, *где вектор* $X = (x_1, \ldots, x_n, 1)$, *будет первым интегралом системы (1), если числа* $h_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m+1}$, *составляют нетривиальное решение линейной однородной системы* $\sum_{k=1}^{m+1} h_k = 0$, $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k = 0$, $j = \overline{1, m}$, *а если числа* $h_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, m+1}$, *являются нетривиальным решением линейной неоднородной системы* $\sum_{k=1}^{m+1} h_k = -n-1$, $\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^j h_k = -\sum_{\tau=1}^{n+1} a_{j\tau\tau}$, $j = \overline{1, m}$, *то функция* F *будет последним множителем системы (1).*

Доказательство основано на определениях первого интеграла [3, с. 35] и последнего множителя [3, с. 121] с учетом того, что функции $p_k\colon x \to \nu^k X$, $k = \overline{1, m+1}$, являются полиномиальными частными интегралами [3, с. 188] системы (1).

Литература

1. *Горбузов В.Н., Проневич А.Ф.* Спектральный метод построения интегрального базиса якобиевой системы в частных производных // Дифференц. уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru). 2001. № 3. С. 17–45.

2. *Горбузов В.Н., Даранчук С.Н.* Интегральный базис системы Якоби — Гессе в частных производных // Изв. Рос. гос. пед. ун-та. Сер. Естеств. и точ. н. 2005. № 5. С. 65–76.

3. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем: монография. Гродно: ГрГУ. 2006.