

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК

С. И. Гайдук, А. А. Кулешов

Белгосуниверситет, Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
kuleshov@bsu.by

Рассматривается задача о вызванных внезапным приданием скорости (кинематическим ударом в одной точке) поперечных колебаниях однородной упругой балки постоянного поперечного сечения с учетом инерции вращения ее поперечных сечений и деформации сдвига.

Математическая постановка задачи: пусть находившаяся в покое однородная упругая балка $0 \leq x \leq l < \infty$, опертая по концам, в начальный момент времени $t = 0$ подверглась в точке $x = x_0$ ($0 < x_0 < l$) удару двигавшимся со скоростью v_0 грузом, причем груз после удара мгновенно отделился от балки. Тогда, пренебрегая для простоты весом балки, но, учитывая инерцию вращения ее поперечных сечений и деформации сдвига, для определения прогибов $u(x, t)$ оси балки и углов $\varphi(x, t)$ наклона касательной к кривой изгиба нужно найти в области $D(0 < x < l, 0 < t \leq T < \infty)$ решение системы уравнений [1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varphi \right) \quad (1)$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0 \delta(x - x_0) \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$\varphi|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2)$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

где a , b и c — положительные постоянные, характеризующие свойства балки, причем $a \neq b$, $\delta(x - x_0)$ — функция Дирака.

Построен явный вид решения, дано его обоснование, доказана единственность решения в некотором классе функций. Построено графическое изображение среднего значения и доверительного интервала для прогибов оси балки в случае алюминия и удара, произведенного по середине балки.

Литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М., 1967.