ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

К.В. Василевский

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

пр. Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

phoenix005@rambler.ru

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ изучается корректность в слабом смысле граничной задачи

$$-\frac{d^3u(t)}{dt^3}+\lambda A(t)u(t)=f(t),\quad t\in]0,T[,\quad u(0)=\frac{du(0)}{dt}=u(T)=0,\quad \lambda\geqslant 1, \tag{1}$$

где u и f — функции переменной t со значениями в H и $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$. Предполагается, что операторы $A(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. При каждом $t \in [0,T]$ операторы $A(t)$ замкнуты в H и выполняются неравенства

$$[u]^2_{(t)} \equiv Re(A(t)u,u) \geqslant c_1|u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)),$$

$$\langle v\rangle^2_{(t)} \equiv Re(A^*(t)v,v) \geqslant c_1|v|^2 \quad \forall v \in D(A^*(t)), \quad c_1 > 0,$$

где $A^*(t)$ – сопряженные операторы в H к операторам $A(t)$ и $D(A^*(t))$ – их области определения.

II. Обратные $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T],\mathcal{L}(H))$ операторов $A(t)$ сильно непрерывны по t в H и при почти всех $t \in]0,T[$ имеют в H слабые производные $d^iA^{-1}(t)/dt^i \in L_\infty(]0,T[,\mathcal{L}(H))$, $i = \overline{1,3}$, такие, что справедливы неравенства

$$\left|\left((d^iA^{-1}(t)/dt^i)g,h\right)\right| \leqslant \widetilde{c}_i\,[g]_{(-2-i,t)}\,[h]_{(-3+i,t)}, \quad \widetilde{c}_i > 0, \quad i = 0,1,$$

$$\left|\left((d^iA^{-1}(t)/dt^i)g,h\right)\right| \leqslant \widetilde{c}_i\,[g]_{(-3,t)}|h| \quad \forall g,h \in H, \quad \widetilde{c}_i > 0, \quad i = 2,3,$$

где эрмитовы нормы $[u]_{(-\alpha,t)} = \sqrt{Re(A^{-\alpha/3}(t)u,u)}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 3$.

Определение 1. Функция $u \in \mathcal{H} = L_2(]0,T[,H)$ называется **слабым решением** граничной задачи (1) для правой части $f \in \mathcal{H}^{*-} = L_2(]0,T[,H_t^{*-})$, если для нее имеет место равенство

$$\int_0^T \left\{\left(u, \frac{d^3\varphi}{dt^3}\right) + \lambda\left(u, A^*(t)\varphi\right)\right\}dt = \int_0^T \left\langle f,\varphi\right\rangle_{(t)} dt$$

для всех $\varphi \in \Phi = \{\varphi \in \mathcal{H} : \varphi(t) \in D(A^*(t)),\ t \in [0,T];$ слабые производные $d^i\varphi/dt^i$, $A^*(t)\varphi \in \mathcal{H}$, $i = \overline{1,3}$; $\varphi(0) = \varphi(T) = d\varphi(T)/dt = 0\}$, где H_t^{*-} — антидвойственное к гильбертову пространству H_t^{*+} — замыканию $D(A^*(t))$ по норме $\langle\cdot\rangle_{(t)}$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t)}$ — полуторалинейная форма антидвойственности между гильбертовыми пространствами H_t^{*+} и H_t^{*-}.

Теорема 1. *Если выполняются условия I, II и некоторое интерполяционное неравенство, то существует $\lambda_1 \geqslant 1$ такое, что для всех $\lambda \geqslant \lambda_1$ и $f \in \mathcal{H}^{*-}$ слабое решение $u \in \mathcal{H}$ граничной задачи (1) существует, единственно и*

$$\int_0^T |u(t)|^2 \leqslant c_1^{-1}\lambda^{-2}\int_0^T \langle f(t)\rangle^2_{(-t)}dt, \quad \langle f(t)\rangle_{(-t)} \text{ – норма в } H_t^{*-}.$$