О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ И ПОСЛЕДНИХ МНОЖИТЕЛЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Д.В. Буслюк, В.Н. Горбузов

Гродненский госуниверситет имени Я. Купалы, факультет математики и информатики

Ожешко 22. 230023 Гродно, Беларусь

gorbuzov@grsu.by

Рассматривается полиномиальная линейная однородная дифференциальная система уравнений в частных производных

$$\mathfrak{P}_j(x)\, u = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1}$$

индуцированная линейными дифференциальными операторами первого порядка $\mathfrak{P}_j = P_{ji}(x)\partial_i \ (i = \overline{1,n}) \ \forall x \in \mathbb{C}$, координатными функциями которых являются полиномы

$P_{j1},\ldots,P_{jn}$, причем хотя бы у одного из них степень равна p_j, а сами операторы $\mathfrak{P}_j$ не являются линейно связанными на вещественном арифметическом пространстве [1].

Для якобиевой дифференциальной системы (1) решается задача о построении первых интегралов и последних множителей Якоби [2].

Получены достаточные условия, при которых дифференциальная система (1) имеет хотя бы один полиномиальный или условный частный интеграл.

На основании полиномиальных частных интегралов с учетом их кратности и условных частных интегралов строятся первые интегралы системы (1).

С целью нахождения интегрального базиса якобиевой системы (1) выделены случаи, когда может быть использован последний множитель. При этом последний множитель находится рекуррентно посредством линейных дифференциальных операторов $\mathfrak{P}_j$ за конечное число шагов их коммутирования.

Так, например, имеет место, доказанная в [2],

Теорема. *Пусть построенное на основании системы (1) уравнение в частных производных $\mathfrak{P}_k(x)u = 0,\ k \in \{1,\ldots,m\}$, не имеет первых интегралов*

$$\Xi_j(x) + \operatorname{div}\mathfrak{P}_j(x) = C_j,$$

где $\Xi_j(x) = \gamma_k M_{kj}(x) + \sum_{l=1}^{s}\sum_{\xi_l=1}^{\varepsilon_l}\sum_{g_{\xi_l}=1}^{\zeta_{\xi_l}} \alpha_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}} R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}}(x) + \beta_\nu S_{\nu j}(x)$ $(k = \overline{1,s+r},\ \nu = \overline{1,q})$ $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $j = \overline{1,m}$, $j \neq k$, *и выполняются условия*

$$M_{kj}(x^j) = 0, \quad k = \overline{1,s+r}, \quad j = \overline{1,m}, \quad j \neq k;$$

$$R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}(x^j) = 0, \quad l = \overline{1,s}, \quad h_{\xi_l} \in \mathbb{N}, \quad q_{\xi_l} = \overline{1,\zeta_{\xi_l}}, \quad \xi_l = \overline{1,\varepsilon_{\xi_l}}, \quad j = \overline{1,m}, \quad j \neq k;$$

$$S_{\nu j}(x^j) = 0, \quad \nu = \overline{1,q}, \quad j = \overline{1,m}, \quad j \neq k; \quad \operatorname{div}\mathfrak{P}_j(x^j) = C_j, \quad j = \overline{1,m}, \quad j \neq k.$$

Тогда функция $\mu\colon x \to X(x)\exp Y(x)$ $\forall x \in G$ является последним множителем якобиевой на области G системы (1), где функции M_{kj}, $R_{lh_{\xi_l}g_{\xi_l}j}$, $S_{\nu j}$, X и Y определяются [2] *условными полиномиальными частными интегралами системы (1) с учетом их кратности.*

Литература

1. *Горбузов В.Н.* Интегралы дифференциальных систем. Гродно: ГрГУ, 2006.

2. *Буслюк Д.В.* Об одном подходе построения первых интегралов и последних множителей дифференциальных систем в частных производных // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2007. №1(48). С. 16–20.