ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТИПА ФРАНКЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОДИНАКОВЫМИ ПОРЯДКАМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

О.Х. Абдуллаев, Н.К. Очилова

Национальный университет Узбекистана, Ташкент
obid.math@mail.ru

В этой работе ставиться и исследуется задача типа Франкля [1] для вырождающего уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} y^{m_0} u_{xx} - x^{n_0} u_{yy} & \text{в } D_0, \\ (-y)^{n_1} u_{xx} - x^{n_1} u_{yy} & \text{в } D_1 \end{cases} \tag{1}$$

где $m_0, n_i = \mathrm{const}$, причем $m_0, n_i > 0$, $(i = 0, 1)$.

D_0 — область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$ соответственно, при $x > 0$, $y > 0$. D_1 — гиперболическая область ограниченная отрезком AC оси $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 0$ и характеристикой $BC : x^{q_1} + (-y)^{q_1} = 1$ уравнения (1), где $2q_1 = n_1 + 2$.

Введем обозначения

$$I_1 = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}, \quad D = D_0 U D_1 U I_1, \quad 2\alpha_1 = \frac{n_1}{n_1 + 2}, \quad \alpha_0 = \frac{n_0 + 1}{n_0 + 2},$$

причем $1/2 < \alpha_0 < 1$.

Задача. Найти в области D функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^{2,1}(D_0) \cap C^2(D_1)$;

2) $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) в области $D_0 \cup \{D_1 \backslash (x + y = 0)\}$;

3) $y^{-m_0} u_y \in C(D_0)$, $u_y \in C(D_1)$, причем эти функции непрерывны вплоть до границы AB. кроме того на AB выполняются условия склеивания:

$$\nu_1^+(x) \equiv \lim_{y \to +0} y^{-m_0} u(x, y) = \lim_{y \to -0} u_y(x, y) \equiv \nu_1^-(x), (x, 0) \in I_1$$

при условии, что эти пределы существуют;

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x, y)|_{BB_0} = \varphi_0(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad u(0, y) = \tau_0(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$u(0, y) = \tau_2(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 0, \quad u_x(0, y) = u_x(0, -y), \quad 0 < y < 1,$$

где $\varphi_0(y), \tau_0(y), \tau_2(y)$ — заданные достаточные гладкие функции.

При определенных условиях на заданные функции доказывается существование и единственность поставленной задачи.

Литература

1. *Смирнов М.М.* Уравнение смешанного типа. М.: Наука, 1985.