КОНИЧЕСКАЯ РЕФРАКЦИЯ, КАУСТИКИ И СОЛИТОНЫ В КРИСТАЛЛАХ

Хаткевич Л. А.

На основе группового представления волновых процессов в кристаллах установлено, что системой уравнений Максвелла с линейными материальными уравнениями в результате введения потенциалов и последовательного учета изменения анизотропии, тока смещения и гиротропии определяется дифференциальный оператор, которым описывается как распространение электромагнитного и ультразвукового излучения, так и его преобразование с формированием каустик и генерацией солитонов. Фурье-образ этого оператора определяет тип преобразования, а его инварианты – характер и ранг преобразования в виде сингатуры и метрики пространства с элементами структуры (тетраэдра, октаэдра и додекаэдра) и плотностями сохраняющихся величин (энергии, заряда и массы)

Изменение электромагнитного излучения описывается системой уравнений Максвелла [1-3]:

$$\partial \mathbf{B} + \nabla^{\times}\mathbf{E} = 0,\ \nabla \mathbf{B} = 0,\ \partial\mathbf{D} - \nabla^{\times}\mathbf{H} = -\mathbf{I},\ \nabla\mathbf{D} = \rho, \qquad (1)$$

где **B, D**, **E** и **H** – векторы электрической и магнитной индукций и напряженностей, **I**– вектор плотности тока проводимости, ρ – плотность свободного заряда, $\partial = \partial/\partial t$ – производная по времени,$\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$ – вектор пространственных производных и $\nabla^{\times}$ – тензорный оператор, дуальный ∇. Условием совместности уравнений этой системы является выполнение закона сохранения заряда $\partial\rho + \nabla\mathbf{I} = 0$, и дивергентные уравнения являются следствиями роторных.

В феноменологической электродинамике уравнения (1) дополняются характеризующими среду материальными уравнениями или уравнениями связи, которые в случае магнитоэлектриков записываются в виде:

$$\mathbf{D} = \varepsilon'\mathbf{E} + \kappa\mu^{-1}\mathbf{B},\ \mathbf{H} = \mu^{-1}(\mathbf{B} - \kappa^{+}\,\mathbf{E}), \qquad (2)$$

где $\varepsilon' = \varepsilon - \kappa\mu^{-1}\kappa^{+}$, ε, μ, $\kappa = \kappa' + i\boldsymbol{\kappa}^{\times}$ – комплексные самосопряженные (эрмитовы) тензоры относительных электрических и магнитных проницаемостей и электромагнитных и магнитоэлектрических восприимчивостей, $^{+}$ означает эрмитово сопряжение, в немагнитных диэлектриках μ = 1, в негиротропных кристаллах ε и μ вещественные, в естественно гиротропных $\kappa = i\boldsymbol{\kappa}^{\times}$ и в магнитоэлектриках $\kappa' \neq 0$.

При групповом представлении [4-7] оптики магнитных кристаллов (диа- и парамагнетиков и, в частности, диэлектриков) ρ = 0 и введением вместо вещественных тензоров электрических и магнитных непроницаемостей их квадратных корней $\varepsilon^{-1/2}$ = A и $\mu^{-1/2}$ = B уравнения (1) симметризуются и записываются в виде [8,9]:

$\partial\mathbf{E}' - \mathrm{J}\,\mathbf{H}' = \mathbf{I}'$, $\partial\mathbf{H}' + \mathrm{J}^T\mathbf{E}' = 0$, (3)

где введен дифференциальный оператор $\mathrm{J} = \mathrm{A}\boldsymbol{\nabla}^{\times}\mathrm{B}$, электрический и магнитный векторы $\mathbf{E}'=\mathrm{A}^{-1}\mathbf{D} = \mathrm{A}\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}' = \mathrm{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathrm{B}\mathbf{H}$ и ток $\mathbf{I}' = \mathrm{A}^{-1}\mathbf{I}$. Из (3) вытекает, что распространение излучения в магнитных кристаллах определяется **одним линейным** дифференциальным оператором.

Электромагнитное излучение в оптике, как и в электродинамике, целесообразно представлять 4-потенциалом $\Phi = (\boldsymbol{\Phi}, \Phi_4)$, которым тождественно удовлетворяются одно родные уравнения Максвелла и вводится соотношениями $\mathbf{B} = \nabla^{\times}\boldsymbol{\Phi}$ и $\mathbf{E} = -(\partial_4\boldsymbol{\Phi} - \nabla\Phi_4)$, определяющими векторный и скалярный (электрический) потенциалы с точностью до скаляра, удовлетворяющего волновому уравнению. При этом неоднородные уравнения, в которых векторы выражаются через потенциалы с помощью уравнений (2), преобразуются в волновые уравнения. Эти уравнения для переопределенного потенциала $\boldsymbol{\Psi} = \mathrm{A}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ факторизуются и представляются обобщающей (1) системой [10,11]:

$\Lambda\Psi = \mathrm{I}'$, $\Psi = \Lambda^{+}\Psi*$, (4)

которая при нерелятивистской калибровке потенциала $\Phi_4=0$ сводится к (3). В (4) оператор $\Lambda = \partial - i(\mathrm{J} - \mathrm{K}) = \partial - i\mathrm{L}$ объединяет производные по времени ∂ с оператором пространственных производных J и оператором взаимодействия излучения с кристаллом посредством тензора восприимчивости: $\mathrm{K} = \mathrm{A}\kappa\mathrm{B}\partial = K\partial$. При этом оператор Λ^{+} непосредственно определяется вторым уравнением в (2) и выделяется оператор преобразования $\mathrm{L} = \mathrm{J} - \mathrm{K} = \mathrm{J}' - \mathrm{K}'$, где $\mathrm{K}' = \mathrm{A}\kappa'\mathrm{B}\partial = K'\partial$ и $\mathrm{J}' = \mathrm{A}(\nabla + i\boldsymbol{\kappa}\partial)^{\times}\mathrm{B}$ – оператор моментного типа, которым представляется преобразование излучения в гиротропных кристаллах.

Линейный оператор J′ выражается сверткой векторного произведения эрмитовых тензоров корней непроницаемостей, образующего тензор 3-го ранга структурных (оптических) постоянных $\mathrm{C} = \mathrm{A}^{\times}\mathrm{B}$ с комплексным векторным оператором производных $(\nabla + i\partial\boldsymbol{\kappa})^{\times} = \nabla'^{\times}$. Оператор J′ является перестановочным оператором, поскольку удовлетворяет волновому уравнению $\mathrm{J}'^T\mathrm{J}' = \mathrm{J}'\mathrm{J}'^T = \partial^2$. Введением векторов главных корней непроницаемостей: $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{ii}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{a}*_i = \mathbf{A}_i\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{a}*_i$ и $\mathrm{B} = \mathbf{B}_i\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{b}_i$ этот оператор представляется в виде:

$\mathrm{J} = \mathrm{C}(\nabla') = \mathbf{A}\nabla'^{\times}\mathbf{B} = ([\mathbf{A}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{B}]\nabla') = ([\mathbf{AB}]_{+}\nabla') + ([\mathbf{BA}]_{-}\nabla') = \mathrm{J}_{+} + \mathrm{J}_{-}$. (5)

Здесь диада $\mathbf{A}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{B}$ записана как сумма альтернированной и симметрированной диад $[\mathbf{A}_i\mathbf{B}_k]_{\pm} = ([\mathbf{A}_i\mathbf{B}_k] \pm [\mathbf{B}_i\mathbf{A}_k])/2$, или половин коммутатора, или векторного произведения $[\mathbf{A}_i\mathbf{B}_k]_{-}$ и антикоммутатора $[\mathbf{A}_i\mathbf{B}_k]_{+}$. Эти диады образуются шестью главными скоростями $\mathrm{V}_{j\pm1} = \pm\,\delta_{ijk}\mathrm{B}_i\mathrm{A}_k$, обратными показателям преломления. Составляющие $\mathrm{J}_{\pm}$ являются проекциями $\boldsymbol{\nabla}'$ на главные скорости и наоборот.

При подстановке решения в виде гармонической волны потенциала $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}$ exp$i(\omega t + \mathbf{kr})$, где $\boldsymbol{\Psi}$ – амплитуда, ω – циклическая частота, $\mathbf{k} = \omega\mathbf{m} = \omega n\mathbf{n} = k\mathbf{n}$ – волновой вектор ($\mathbf{m}$ – вектор рефракции n – показатель преломления и $\mathbf{n}$ – волновая нормаль) производные ∂ и ∇' заменяются на $i\omega$ и $i\omega(\mathbf{m} + i\boldsymbol{\kappa}) = i\omega\mathbf{m}'$, и уравнения (4) преобразуются в алгебраические. Отнесённый к частоте Фурье-образ оператора является унитарным бесследным планальным тензором:

$$\Lambda/i\omega = 1 - L/\omega = 1 - \mathrm{C}(\mathbf{m}') = U, \qquad (6)$$

поскольку удовлетворяет соотношению ортогональности $UU^{+} = 1$ и инварианты SpU= Det$U$ = 0. Унитарный тензор (6) сводится к 4-вектору или кватерниону и биспинору: $U = U_\alpha\sigma_\alpha$, α =1,2,3,4, где σ_α – матрицы Паули, удовлетворяющие соотношению $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\delta_{ijk}$ (δ_{ij} и $i\delta_{ijk}$ – тензоры Кронекера и Леви–Чивита). Этот биспинор определяет биспинор скорости $L/k = U/n = V = V_\alpha\sigma_\alpha$, который выражается в виде $V = V_+ + V_- = V_\pm$, где коммутатором V_+ представляется циклическое вращение с перемещением и определяется дуальный так называемый корневой вектор $\mathbf{u}_+$, а антикоммутатор V_- представляет сопровождающее это вращение смещение и сводится к скаляру u_-.

В негиротропных магнитных кристаллах $\mathrm{C}(\mathbf{m}) = O$ является вещественным асимметричным ортогональным тензором, которым определяется вектор-параметр ортогонального преобразования $\mathbf{u}_+/u_-$. Биспинором скорости $V = \mathrm{C}(\mathbf{n}) = u_\pm = u_- \pm i\mathbf{u}_+ \equiv u_0 \pm i\mathbf{u}\boldsymbol{\sigma}$ параметрически представляется поверхность лучевых скоростей, поляризация и двулучепреломление излучения. Лучевая поверхность в канонической форме представляется инвариантом Det V = Sp $(VV^{+})/2 = u_+u_- = u_0^2 + \mathbf{u}^2 = |u|^2$ (рис. 1,2).

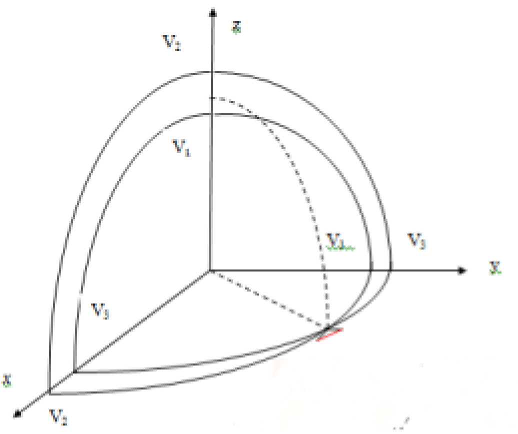

Рис.1. Сечение лучевой поверхности

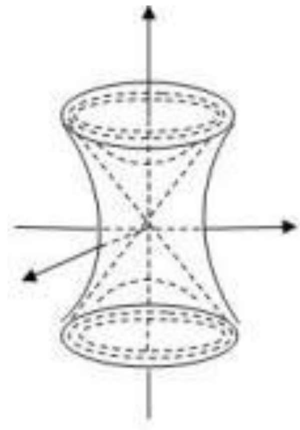

Рис.2. Вырождение конуса лучей

Точки поверхности $u_0 = 0$ являются особыми кратными коническими, а соответствующие направления – оптическими осями. В двуосных кристаллах в случае оптических осей (бинормалей) образуется конус лучей внутренней конической рефракции с соответствующим эллипсом особых кратных параболических точек. В гиротропных кристаллах ортогональный оператор J и тензор *O* оказываются унитарными оператором J′ и тензором *U*. При этом ликвидируются кратные конические точки и бинормали и полости двусвязной поверхности скоростей разделяются.

В собственно гиротропных кристаллах тензор структурных постоянных C = A$^{\times}$B комплексируется из-за возбуждения поперечного тока смещения, который учитывается эрмитовыми тензорами проницаемости. При этом комплексные биспиноры (кватернионы) скоростей оказываются бикватернионами (октавами), и циклические вращения со смещением преобразуется в правое или левое винтовое движение.

При естественной гиротропии (пространственной дисперсии) из-за учета производных по времени $i\mathbf{\kappa}\partial$ также возбуждается ток смещения, направленность которого определяется вектором **κ**, и кристалл намагничивается и электрополяризуется. Такое состояние кристалла учитывается комплексификацией оператора **∇** и вектора **m**, и биспиноры также преобразуются в октавы, поскольку вращение со смещением дополняется пространственно-временным вращением.

В общем случае наличия как собственной, так и естественной гиротропии (поскольку $u_0/|\mathbf{u}| \sim 10^{-2}$) при отражении и изменении направления распространения излучения на встречное из-за неизменности вектора гирации **κ** скорости и поляризация волн оказываются различными: имеет место, как и в магнитоэлектриках (в которых $\kappa' \sim 10^{-4}$) явление невзаимности встречных волн.

При учете невзаимности уравнения Максвелла в гиротропных кристаллах преобразуются в уравнения, аналогичные релятивистским уравнениям Дирака, и проявляется масса электрона, объединяющая заряд взаимодействующего излучения с зарядом инерционного кристалла. Следовательно, в общем случае гиротропных кристаллов излучение должно квантоваться как фермионы [10,11]. Учет дивергенции сопровождается перенормировкой заряда, изменяет симметрию кристалла и согласно теореме Нетер инварианты тензора скорости и сохраняющиеся величины − энергию и заряд.

С точки зрения квантовой теории [12], линейно поляризованное и «фермионизованное» излучение в двулучепреломляющих негиротропных кристаллах в собственно гиротропных бозонизируется, а фотоны электрозаряжаются, и излучение квантуется. В естественно гиротропных кристаллах волны приобретают разность фаз, которая аннулируется при отражении, но излучение «вторично» квантуется и опять фермионизируется с заменой статистики Бозе – Эйштейна на статистику Ферми – Дирака.

В обоих случаях вместе с разделением полостей и ликвидацией бинормалей появляется (как единицы измерения) квант энергии $\hbar$ = h/2π = 1,054•10^{-27} *эрг/с*, где h – постоянная Планка, 1/2 спина $\mu = 1{,}0016\mu_B$, где μ_B – магнетон Бора, и заряд e =

$(137{,}04)^{-1/2}\kappa$ = A/F, где A и F – число Авагадро $6{,}02\bullet10^{23}$ и Фарадея 96600, причем $\hbar c$ = 1, где $c = 2{,}998\bullet10^{10}$ *см/с* – скорость света, и магнетон Бора $\mu_B = \hbar e/2mc$, где $e = 1{,}602\bullet10^{-19}\kappa$ и $m = 9{,}\ 110\bullet10^{-28}$ *г* – заряд и масса электрона соответственно.

Оператором взаимодействия K представляется различное («слабое» или «сильное») взаимодействие излучения со средой. При этом $\kappa' = 0$ или $\kappa' \neq 0$, и соответственно операторами преобразования J' или $L = J - K = J' - K'$, аналогичными операторам групп Лоренца или Пуанкаре, реализуется аффинное преобразование в виде циклического вращения с перемещением и деформацией только сдвига или со сдвигом и растяжением-сжатием. На основе теории непрерывных групп эти операторы представляются с единой точки зрения и используются при обобщении квантовой релятивистской электродинамики для нелинейной оптики и акустики и акустооптики кристаллов [13,14].

При наличии κ' два главных вектора показателей дополняются третьим и связываются с базисом кристаллической решетки и с кристаллофизическим базисом. При этом лучевая нормаль **s** в гиротропных кристаллах связывается с волновой нормалью **n** посредством комплексного вектора ($\mathbf{n} + i\boldsymbol{\kappa}/n$), а в магнитоэлектриках – тензором восприимчивостей $\kappa = \kappa' + i\boldsymbol{\kappa}^{\times}$. Эта связь показателей преломления кристалла с лучевыми скоростями волн определяется групповым умножением кватернионов:

$$u\bullet m = (u_0 \pm i\mathbf{u})\bullet(m_0 \pm i\mathbf{m}) = u_0m_0 \pm (\mathbf{um}) \pm i(u_0\mathbf{m} \pm m_0\mathbf{u}) \pm [\mathbf{um}], \qquad (7)$$

которым определяется «закон сохранения»: $(u/|u|)\bullet(m/|m|) = UU^{+} = V\bullet N = E$, где E выражается произведением тензора $\delta_{\alpha\beta}$ и δ-функции, если уравнения (4) имеют решение. При этом решение характеристического уравнение 4-го порядка методом Феррари сводится к решению уравнения 3-го прядка и определяется любым из трёх его решений, представляющих скорости, вероятно, упругих волн. Вытекающим из (7) соотношением ортогональности также определяются квазиобратный тензор показателей N и функция Грина (фундаментальное решение) G и связывается скалярное и векторное произведение, соответственно, с сигнатурой и метрикой пространства и с ассоциативностью Якоби, условиями совместности, интегрируемости и нулевой кривизны пространства.

Благодаря наличию κ' в кристаллах возбуждается излучение на других частотах и при синхронизме реализуется преобразование частоты волн [13]. Действительно, согласно (7), умножением кватернионов (биспиноров) волновых векторов $\mathbf{k} = \mathbf{k}''\bullet\,\mathbf{k}'$ для двух изорадиальных волн определяется третий вектор $\mathbf{k}_{\pm}$. Тогда при синхронизме $\mathbf{k}_{\pm}' \pm \mathbf{k}_{\pm}'' = \mathbf{k}_{\pm}$ имеет место преобразование частоты $\omega' \pm \omega'' = \omega$. Ограничившись нормальной дисперсией, после введения векторов рефракции изорадиальных волн $\mathbf{m}_{\pm} = \boldsymbol{N}_{\pm} = N[\mathbf{e}\bullet\mathbf{h}]$, где **e** и **h** – орты векторов главных показателей преломления кристалла, для трёх изорадиальных волн с лучевой нормалью **s** получаются уравнение шести конусов синхронизма: $[\Delta\mathbf{s}] = 0$, $\Delta = \mathbf{m}_{\pm}' \pm \mathbf{m}_{\pm}'' - \mathbf{m}_{-}$, которые реализуются компланарными векторами.

В диапазоне радиочастот, когда $\kappa = \kappa' + i\boldsymbol{\kappa}^{\times} \approx m^{\times} = n\mathbf{n}^{\times}$ и волны квазипоперечные из-за тензора $\boldsymbol{\kappa}^{\times}$, тензором κ' наряду с нелинейностью представляется обменное взаимодействие как в магнитоэлектриках, так и в анти- и ферромагнетиках и ферритах. Кроме того, в твердом теле, когда $\kappa > m^{\times}$, сильное обменное (пьезомагнитное, пьезоэлектрическое и упругое) взаимодействие приводит к возбуждению наряду со спиновыми волнами (магнонами, экситонами, поляронами и другими квазичастицами и инстантонами) упругих ультразвуковых и тепловых волн (фононов) [14]. Тогда обобщенные уравнения (4) оказываются аналогичными уравнениям движения твердого тела в жидкости и около неподвижной точки. При этом комплексные октавы представляются гиперкомплексными числами Клиффорда–Липшица посредством матриц 4-го порядка и γ-матриц, которые подчиняются соотношению $\gamma_\alpha\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}$ и образуют алгебру Дирака, имеющую 32 элемента и 17 классов.

При спектральном методе [15] решение неоднородного уравнения (4) представляется «дифракционным» интегралом $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r},t) = \int dt' d\mathbf{r}' G(\mathbf{R},T)\, \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}',t')$, где $G(\mathbf{R},T) = \exp[i(\mathbf{kR} \pm \omega T)]$ – функция Грина, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $T = t' - t$ и на границе кристалла $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ и $t = 0$. При ограничении пучками и импульсами лазерного излучения частота:

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{uq} + \mathbf{q}w\mathbf{q}/2, \qquad (8)$$

где ω_0 и $\mathbf{k}_0$ – частота и волновой вектор центральной волны, $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$, а $\mathbf{u}_{\pm} = d\omega/d\mathbf{k}$ и $w_{\pm} = d\mathbf{u}/d\mathbf{k}$ – различные из-за двулучепреломления производные при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ и $\mathbf{uk} = \omega$. После подстановки (8) и введения в результате интегрирования $\delta(\omega_0 \pm \mathbf{kr}'/t)$-функции показатель в выражении функции Грина преобразуется к разности квадратичных форм: $W = \mathbf{q}(w_{\pm}t)\mathbf{q} + 2\mathbf{u}'\mathbf{q} = \mathbf{q}'(w_{\pm}t)\mathbf{q}' - \mathbf{u}'(w_{\pm}t)^{-1}\mathbf{u}'$, где $\mathbf{u}' = (\mathbf{u}_{\pm} \pm \mathbf{r}'/t)t$ и $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \mathbf{u}'$.

Следует отметить, что выражение функции Грина может быть использовано для введения энтропии $S = k \ln W$, где $k = 1{,}38 \bullet 10^{-16}$ *эрг/град* – постоянная Больцмана, которая вместе с абсолютной температурой T определяет потери энергии в виде тепла $Q = ST$, причем $T_0 \approx 2 \cdot 137 - 1 = 273$. На этой основе устанавливается, что $k = R/A$, где $R = 1{,}986$ *кал/град* $= 8{,}314 \bullet 10^7$ *эрг/град* $= 8{,}314$ *дж/град* – газовая постоянная, и 1 *кал* $= 4{,}186 \bullet 10^7$ *эрг* $= 4{,}186$ *дж*. При этом факторизация функции W раскрывает связь энтропии с калибровкой потенциала, нормировкой заряда и массы, статистикой и симметрией кристаллических и динамических (топологических и статистических) систем.

Уравнением (8) представляются поверхности 2-го порядка, особенности которых определяются дискриминантом $\mathbf{u}w\mathbf{u} + [\omega_0 - (\pm\omega)]\,|w|$ и детерминантом $|w|$. В собственном базисе $\mathbf{i}_i$ тензор $w_{\pm}$ диагонализируется и $|w| = w_{III} = w_1 w_2 w_3$. При $|w| = 0$ поверхности вырождаются и характеризуются инвариантами, представляющими полную (гауссову) кривизну поверхности скоростей $w_{II} = w_1 w_2$ и среднюю кривизну $w_c = w_I = (w_1+w_2)/2 = \mathrm{Sp}\, w$. В зависимости от того $w_{II} > 0$ или $w_{II} = 0$ и $w_{II} < 0$ точки поверхности являются эллиптическими (двойными), или особыми параболическими (дуальными) и гиперболическими (седловыми), а также кратными (коническими) при $w_1 = w_2 = 0$, и соответствующие направления – ординарными или особыми. Образующими конусов лучей определяются эллипсы параболических точек, разделяющие эллиптические и гиперболические (мнимые) точки с конической.

При использовании (8) функция Грина соответствующего обобщенного параболического уравнения выражается следующим образом $G_\pm(\mathbf{R},t) = (2\pi)^{-2}\exp i[\mathbf{u}'(w_\pm t)^{-1}\mathbf{u}']/2$ ${}_{-\infty}\!\int^{\infty} d\mathbf{q}'\mathbf{i}_\pm\!\bullet\!\mathbf{i}_\pm \exp(-i\mathbf{q}'(w_\pm t)\mathbf{q}'/2) = \Pi^3{}_{j=1}G_{j\pm1},$ где $G_{j\pm1}$ – повторные интегралы. В случае эллиптических точек и ординарных направлений после введения $q'_j\mathbf{i}_{j\pm1} = \mathbf{q}'(w_{j\pm1}t)^{1/2}$ интегрирование выполняется с помощью выражения $(\pi/2)^{-1/2}\ {}_{-\infty}\!\int^{\infty} dq'_j \exp \pm i q'_j{}^2 = \pi^{1/2}(1 \pm i)/2$, и обнаруживается, что квадрат амплитуды (интенсивность) поляризованного излучения изменяется со временем обратно пропорционально кривизне поверхности скоростей. При этом пучки и импульсы представляются разными специальными и в том числе ортогональными функциями и многочленами.

В случае особых направлений интегралы оказываются расходящимися: имеют место дифракционные катастрофы и резкое изменения интенсивности излучения с образованием каустик. Тогда согласно теории катастроф учитываются члены р-го выше 2-го порядка, пренебрегая остальными, и повторные интегралы $G_{j\pm p}$ рассматриваются отдельно и представляются в канонической форме в геодезических координатах.

В случае бинормалей $\mathbf{n}_0$ и наличия параболических точек, когда, напр., $w_2 = 0$, и ортогональные $\mathbf{i}_2$ сечения поверхности скорости оказываются кривыми р-го порядка и имеют место семь простейших катастроф, которые обозначаются $A_{p\text{-}1}$, $p = 3, 4, 5, 6$ и D_{p+1}, $p = \pm3, 4$, а также E_6, E_7 и E_8, при которых амплитуды излучения имеет различную степенную зависимость от $\mathbf{u}'$ (и $\mathbf{r}'$) [15]. Эта зависимость описывается посредством Г-функций, значения которых близки к 1, мало отличаются от $G_{j\pm1/2} = \pi^{1/2}\exp[\pm i(\pi/2)]$ в ординарных направлениях, и обнаруживают связь катастроф с нелинейностью и трансцендентными числами π и e.

При оптической оси (бирадиали) $\mathbf{s}_0$ и внешней конической рефракции излучение распространяется в виде пакета волн с конусом векторов рефракции $\mathbf{m}(\mathbf{s}_0)$ как **солитон** [16,17], который вне кристалла рассеивается в виде конуса внешней рефракции, а в кристалле из-за дисперсии может расслаиваться на **солитоны-квазичастицы**, сохраняющие энергию и (или) заряд, а также поглощаться. Такие солитоны описываются решениями нелинейного уравнения синус-Гордона [18]. При учете дисперсии из волновых уравнений получаются другие соответствующие шести уравнениям Пенлеве нелинейные уравнения теории солитонов, в которых дисперсия компенсируется нелинейностью. Эти солитоны представляются исключительными комплексными группами E_6, E_7 и E_8 и в том числе вещественными группами G_2 и F_4. Решения соответствующих нелинейных уравнений получаются методами обратной задачи рассеяния и, в частности, задачи Римана–Гильберта и представления нулевой кривизны и выражаются в виде эллиптических и автоморфных функций.

Существенно, что в отличие от каустик, формирование которых определяется кривизной поверхности скоростей, генерация солитонов определяется «плотностью» этих поверхностей и не гауссовой, а кривизной векторного пространства скоростей. При этом устанавливается непосредственная связь конусов синхронизма с конической рефракцией и обнаруживается проблема Гёделя неполноты аксиоматических теорий.

Таким образом, при линейном групповом представлении оптика и акустика кристаллов объединяют современную и классическую физику и ставятся на общую основу теоретической и математической физики. При этом распространение излучения в магнитных кристаллах описывается вещественными группами 4-го порядка: спинорной (кватернионной) $Q \equiv SU(2) = SO(3) = Sp(1) \equiv E(2)$ и линейной некомпактной группой $SL(2) \equiv SU(1,1) = SO(2,1) = Sp(1,R)$, которые при учете гиротропии оказываются комплексными группами 1-го ранга: $A_1 \sim B_1 \sim C_1$. Тогда в случае собственной гиротропии распространение излучения обычно представляется унитарной группой 2-го ранга 8-го порядка $A_2 \equiv SU(3)$, в случае же естественной – действующей в пространстве-времени простой комплексной 6-го порядка группой Лоренца $D_2 \equiv SO(3,1)$. Эта группа локально изоморфна унимодулярной унитарной подгруппе $SU(1,1)$ двухсвязной комплексной группы $SL(2C)$ и представляется посредством эрмитово сопряженных матриц.

В общем же случае, когда учитывается явление невзаимности, а также согласуются разные электромагнитные поля методом Томаса – Ферми или Хартри – Фока [12], распространение излучения в кристалле описывается действующими в 5-мерном пространстве полупростыми ортогональными и симплектическими группами 2-го ранга 10-го порядка $B_2 \sim C_2$: $SO(5) \sim Sp(2)$, $SO(3,2) \sim Sp(2,R)$ и $SO(4,1) \sim Sp(1,1)$, которые представляются бикватернионами (октавами) посредством γ-матриц, образующих алгебру Дирака, имеющую неприводимое представление 16-го порядка.

Нелинейное преобразование электромагнитного и ультразвукового излучения представляется комплексными октавами. При этом преобразования электромагнитных волн представляются группами 3-го ранга 15-го порядка $A_3 \sim D_3$, включающими конформную группу, а ультразвуковых – группами максимального 21-го порядка B_3 и C_3.

Эти группы, как и кристаллы, по симметрии разделяются на семь систем, особенности которых определяются акустическими осями (семью в простейшем случае кубической системы), и ультразвуковое излучение также представляется посредством элементарных трансцендентных функций при использовании в качестве кристаллической ячейки Вигнера – Зейтца наряду с параллелепипедом тетраэдра (ромба), октаэдра (куба) и икосаэдра (додекаэдра).

Список литературы

1. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Мн. Наука и техника (1976) 456.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.(1992) 620.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М. (1973) 856.
4. Барут А., Рончка Р. Теория представления групп и ее приложения. М Мир (1980).
5. Федоров Ф. И. Группа Лоренца. М. Наука (1979) 384.
6. Адамс Дж. Лекции по группам Ли. М. Наука (1979) 144.
7. Александров П.С. Введение в теорию групп. М. Наука (1980) 144.
8. Khatkevitch A. G., Khatkevitch L. A. / Proc.SPIE. – 2001. – V.4358. –P.191-195.
9. Хаткевич А. Г., Хаткевич Л. А. / Ж. пр. спектр. – 2002. – Т. 69. – С. 97-103.
10. Хаткевич А. Г., Хаткевич Л. А. / Ж. пр. спектр. – 2003. – Т. 70. – С. 357-359.
11. Хаткевич А. Г., Хаткевич Л. А. / Ж. пр. спектр. – 2004. – Т.71. – С.815-822.
12. Займан Дж. Современная квантовая теория. М. Мир (1971) 288.
13. Хаткевич А. Г., Хаткевич Л. А. / Лазерная физика и применение лазеров. Минск, 2003. – С. 84-85.
14. Хаткевич А. Г., Хаткевич Л. А. / Ковариантные методы в физике. Оптика и акустика. Минск, 2005.– С. 22 – 34.
15. Хаткевич А. Г., Хаткевич Л. А. / Ж. пр. спектр. –2007.–Т. 74 –С,– 491-498.
16. Хаткевич А. Г., Хаткевич Л. А. / Лазерная физика и оптические технологии II. Гродно, 2006. –С. 87–89.
17. Хаткевич Л. А., Хаткевич А. Г. / Лазерная физика и оптические технологии III. Минск, 2008.– С.181–184.
18. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М., 1989.