О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ КВАДРАТИЧНОГО ЦЕНТРА

Л.А. Черкас

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

ул. П. Бровки 6, 220027 Минск, Беларусь

leonid_ch@tut.by

Рассматривается общее семейство квадратичных систем

$$dx/dt = 1 + xy, \quad dy/dt = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + ay^2, \tag{1}$$

где $a_{00} = a_{01} + a_{11} - a_{10} - a_{20} - a$, $a_{10} = -a_{20}/(x_0+1) - a_{01}/x_0 + a(x_0+1)/x_0{}^2$, имеющих фокус или центр $A(1,-1)$ и особую точку $B(x_0, -1/x_0)$. Решается задача определения конфигураций особых точек систем (1), для которых из траекторий центра A при возмущении могут возникать три предельных цикла. Решение такой задачи с помощью исследования функции Мельникова посвящена обширная литература (обзор [1]). В отличие от указанного метода наш подход состоит в сведении системы (1) к системе Льенара

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -g(x,\alpha) - f(x,\alpha)y, \tag{2}$$

где α - векторный параметр. При $\alpha = 0$ система (2) имеет центр $\tilde{A}(1,0)$. Тогда по прогнозу Смейла, число предельных циклов системы (2) определяется числом решений системы уравнений

$$F(x,\alpha) = F(y.\alpha), \quad G(x,\alpha) = G(y,\alpha), \tag{3}$$

где $F(x,\alpha) = \int_x^1 f(x,\alpha)du$, $G(x,\alpha) = \int_x^1 g(x,\alpha)du$, $x < 1$, $y > 1$. Реализацию прогнозного числа предельных циклов можно затем проверить для конкретных систем. В нашем случае для получения прогноза необходимо взять функции $g(x) = Q_2(x)x^{2a-3}$, $f(x) = \epsilon P_2(x)x^{a-2}$, $P_2(x)$, $Q_2(x)$ — многочлены второй степени по x, ϵ — малый параметр, при $\epsilon = 0$ система (2) имеет центр $\tilde{A}(1,0)$. Таким образом, задача сводится к исследованию соответствующей неалгебраической системы (3). Она полностью исследуется в плоскости параметров a_{11}, a_{01} при фиксированных остальных.

Сформулируем основной результат, обозначая конфигурации особых точек по числу седел и антиседел, включая особые точки в бесконечности. Например, обозначение $3A+1S+2S_\infty+ + 1A_\infty$ означает, что система имеет четыре конечные особые точки: три антиседла и одно седло; и три особые точки в бесконечности: два седла и одно антиседло.

Теорема 1. *При возмущении центра* $A(1.-1)$ *системы (1) из кривых центра могут возникнуть три предельных цикла при условиях: 1)* $a < 0$, $a_{20} > 0$, $x_0 > 1$ *в конфигурации* $3S + 1A$ *; 2)* $a > 1$, $a_{20} < 0$, $0 < x_0 < 1$ *в конфигурации* $3A + 1S$ *; 3)* $a > 1$, $a_{20} < 0$, $x_0 < 0$ *в конфигурации* $2A + 2S_\infty + 1S_\infty$ *; 4)* $0 < a < 1$, $a_{20} < 0$, $x_0 < 0$ *в конфигурации* $2A + 1S_\infty$ *; 5)* $0 < a < 1$, $a_{20} > 0$, $x_0 > 1$ *в конфигурации* $1A + 2S + 2A_\infty + 1S_\infty$.

Предложенным методом также можно изучать предельные циклы, возникающие одновременно из траекторий двух центров системы (1).

Литература

1. *I.D. Iliev, Chengzhi Li and Jiang Yu* Bifurcotions of limit cycles from quadratic non-Hamiltonian systems // Nonlinearity 2005. V. 18. P. 305–330.

2. *Черкас Л.А.* Методы оценки числа предельных циклов // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С 779–801.