О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИИ ДЮЛАКА ДЛЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СЕМЕЙСТВА КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

И.Н. Сидоренко

Белгосуниверситет, механико-математический факультет,

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

sidorenkoin@tut.by

Исследуются предельные циклы квадратичной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 1 + xy, \quad \dot{y} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + ay^2, \tag{1}$$

окружающие фокус $A(1,-1)$. Преобразование $x = 1/\tilde{x}$, $y = \tilde{x}^{(1-a)}\tilde{y} - \tilde{x}$ [1] и растяжение шкалы времени переводит систему (1) в систему Льенара

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \tilde{y} - F(\tilde{x}), \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = -g(\tilde{x}). \tag{2}$$

При этом фокус $A(1,-1)$ переходит в особую точку $A_0(1,0)$ и изучение предельных циклов вокруг особой точки $A(1,-1)$ системы (1) сводится к изучению предельных циклов вокруг особой точки $A_0(1,0)$ системы (2), для которой можно определить функцию Андронова — Хопфа $a_{11} = AH(x)$, равную тому значению параметра a_{11}, при котором система (2) имеет предельный цикл, проходящий через точку $(x,0)$. Рассмотрим промежуток $[a_{11}{}^*, a_{11}{}^{**}]$, на котором функция Андронова — Хопфа не имеет экстремумов, причем $a_{11}{}^*$ соответствует значению параметра a_{11}, при котором наблюдается бифуркация Андронова — Хопфа; $a_{11}{}^{**}$ — рождению сепаратрисного цикла.

Для доказательства единственности предельного цикла используется модифицированная функция Дюлака.

Определение 1. ([2]) Функция $\Psi(x,y)$ называется функцией Дюлака для системы $dx/dt = P(x,y)$, $dy/dt = Q(x,y)$ в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$, если существует такое $k \in \mathbb{R}$, $k \neq \neq 0$, что справедливо неравенство

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div} f + \frac{\partial \Psi}{\partial x}P + \frac{\partial \Psi}{\partial y}Q > 0 (< 0), \quad \forall (x,y) \in \Omega, \quad f = (P,Q).$$

Для построения функции Дюлака во всей области существования предельных циклов необходимо варьировать параметры k и n, где n — степень функции Дюлака, которые заранее не известны. При больших степенях функции Дюлака естественной является задача оценки верхнего значения параметра n, при котором можно построить адекватную функцию Дюлака во всей естественной области существования предельных циклов. Целью данного исследования является нахождение этого значения для доказательства единственности предельного цикла у некоторых однопараметрических семейств квадратичных систем на плоскости, соответствующих различным конфигурациям особых точек. Приведены системы, для которых $n = 2$.

Литература

1. *Cherkas L.A., Artes J.C., Llibre J.* Quadratic systems with limit cycles of normal size // Buletinue Academiei de stiinte a Republicii Moldova. Matematica. 2003. V 41. № 1. P. 31–46.

2. *Черкас Л.А.* Методы оценки числа предельных циклов // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 5. С. 779–801.

3. *Гринь А.А.* Развитие метода вспомогательных функций Дюлака для качественного исследования полиномиальных автономных систем на плоскости: Дис. … к-та физ.-мат. наук: 01.01.02. Гродно, 2000.