ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА И ФОКУСА ДЛЯ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ЛЬЕНАРА

А.П. Садовский

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by

Кубическая система

$$\dot{x} = y + Hx^2 + Dxy + Qx^3 + Px^2y,$$
$$\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx62y + Mxy^2 + Ny^3 \tag{1}$$

в окрестности $O(0,0)$ аналитической заменой и исключением времени приводится к уравнению

$$P_0(x)yy' = -x + P_2(x)y^2 + P_3(x)y^3, \tag{2}$$

где $P_i(x)$ - многочлены, $P_0(0) = 1$. Будем в дальнейшем предполагать, что

$$P_3(x) = xQ(x), \quad Q'P_0 + 3QP_2 = xR(x), \quad 3R'Q - 5RQ' = xS(x),$$

где $Q(x), R(x), S(x)$ -- многочлены. В противном случае $O(0,0)$ - фокус для (1). Если $Q(x) \equiv 0$, то $O(0,0)$ — центр для (1).

Пусть $Q(0) \neq 0$. Замена $y = YQ^{-1/3}$ приводит (2) к уравнению (не меняем обозначения y)

$$P_0(x)yy' = -x(1-y^3)Q^{2/3} + xRy^2/(3Q). \tag{3}$$

Если $R^3/Q^5 \equiv \text{const}$, то $O(0,0)$ — центр. Пусть теперь $R^3/Q^5 \neq \text{const}$, $R(0)Q(0) \neq 0$, но

$$\frac{P_0(x)S(x)}{R^2(x)} \equiv \frac{S(0)}{R^2(0)} = \frac{1}{v}.$$

Тогда замена $y = Yh^v$, где $h = R/Q^{5/3}$, преобразует (3) к уравнению

$$yy' = -3vh'h^{-2-2v}(1 - y^3h^{3v}).$$

В этом случае $O(0,0)$ системы (1) — центр. Если $O(0,0)$ системы (1) — центр, но $XR^3/Q^5 \neq$ $\neq \text{const}$, $P_0S/R^v \neq \text{const}$, то тогда существует рациональная функция $w(x)$ с $w'(0) = 0$, $w''(0) \neq 0$ и рациональные функции f, g, для которых

$$R^3(x)/Q^5(x) \equiv f(w(x)), \quad P_0(x)S(x)/R^2(x) = g(w(x)).$$

В этом случае замена $w(x) = u$ приводит уравнение (3) к уравнению

$$q(u)y\frac{dy}{du} = -(1 - y^3) + \frac{1}{3}f_1(u)y^2,$$

где $f_1(u) = f^{1/3}(u)$, $q(u) = g(u)f_1^2(u)/f_1'(u)$. Система (1) в этом случае является обратимой с центром в точке $O(0,0)$. Для системы (1) $O(0,0)$ — центр, если

$$Q(x) = \alpha^3(x)q_1(w(x)), \quad R(x) = \alpha^5(x)r_1(w(x)), \quad P_0(x) = \alpha^2(x)p_1(w(x))x/w'(x),$$

где α, q_1, p_1, r_1 — рациональные функции. Т.В. Щегловой для (1) найдены новые случаи центра для $Q \equiv 0$, $R^3/Q^5 \equiv const$ и для $w = x^2/(1 + \beta x)$.