

ОБ ИНТЕГРАЛАХ ЛИНЕЙНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

П.Б. Павлючик

Гродненский госуниверситет имени Я. Купалы, факультет математики и информатики

Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь

p.pavlyuchik@grsu.by

Рассмотрим автономную линейную неоднородную дифференциальную систему

$$dw = X(w) dz, \quad (1)$$

где $w = \text{colon}(w_1, \dots, w_n)$ и $z = \text{colon}(z_1, \dots, z_m)$ — точки пространств \mathbb{C}^n и \mathbb{C}^m соответственно, векторы-столбцы $dw = \text{colon}(dw_1, \dots, dw_n)$ и $dz = \text{colon}(dz_1, \dots, dz_m)$, элементы матрицы $X(w) = \|X_{ij}(w)\|$ — линейные неоднородные функции $X_{ij}: w \rightarrow \sum_{\xi=1}^n a_{ij\xi} w_\xi + a_{ij0}$ $\forall w \in \mathbb{C}^n$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, с коэффициентами $a_{ij\xi} \in \mathbb{C}$, $\xi = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Для системы (1) разработан спектральный метод [1] построения интегрального базиса в комплексных фазовом и расширенном пространствах, основанный на существовании у линейной неоднородной системы в полных дифференциалах линейного и условного частного интегралов [2], построенных по общим собственным векторам матриц, индуцированных этой дифференциальной системой.

Получены условия, позволяющие в явном виде строить автономные и неавтономные первые интегралы дифференциальной системы (1).

Так, например, имеет место, доказанная в [3],

Теорема. Пусть матрицы $A_j = (a_{ij\xi})$, $j = \overline{1, m}$, имеют общие собственные векторы ν^k , которым соответствуют собственные числа λ_k^j , $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, \alpha}$, при условии, что при каждом фиксированном индексе $k = \overline{1, \alpha}$ существует хотя бы одно число, например, $\lambda_k^{j_k} \neq 0$, где индекс $j_k \in \{1, \dots, m\}$, $k = \overline{1, \alpha}$, и ν^θ , которым соответствуют собственные числа $\lambda_\theta^j = 0$, $j = \overline{1, m}$, $\theta = \overline{\alpha+1, \alpha+\beta}$, при условии, что при каждом фиксированном $\theta = \overline{\alpha+1, \alpha+\beta}$ среди чисел $\gamma_\theta^j = \nu^\theta a_j$, $j = \overline{1, m}$, существует хотя бы одно отличное от нуля, когда $\alpha + \beta = m + 1$. Тогда автономным первым интегралом дифференциальной системы (1) будет скалярная функция

$$W: w \rightarrow \prod_{k=1}^{\alpha} (\nu^k w + \mu_k)^{h_k} \exp \sum_{\theta=\alpha+1}^{\alpha+\beta} h_\theta \nu^\theta w \quad \forall w \in \Omega,$$

где Ω — любая область из множества определения DW , числа h_q , $q = \overline{1, m+1}$, составляют нетривиальное решение линейной однородной системы

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \lambda_k^j h_k + \sum_{\theta=\alpha+1}^{\alpha+\beta} \gamma_\theta^j h_\theta = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

а числа $\mu_k = \nu^k a_{jk} / \lambda_k^{jk}$, $k = \overline{1, \alpha}$.

Литература

1. Горбузов В.Н. Интегралы \mathbb{R} -линейных систем в полных дифференциалах / В.Н. Горбузов, А.Ф. Проневич // Докл. НАН Беларуси. — 2004. — Т. 48, № 1. — С. 49 – 52.
2. Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем. Гродно: ГрГУ, 2006.
3. Павлючик П.Б. Интегралы автономной линейной неоднородной системы в полных дифференциалах в комплексной области // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та. Сер. 2. 2008. №1(64). С. 43 – 49.