СЛУЧАЙ ОТСУТСТВИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА

И.Х. Мударисов, М.Ю. Денисова, Р.Р. Насыбуллов

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

Межлаука 1, 420111 Казань, Россия

denisova_mar@mail.ru

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{x + ay^{2n+1} + bx^2y^{2n-1} + cx^{2n+1}}{y}, \tag{1}$$

где a, b, c — действительные постоянные коэффициенты. В уравнении (1) введем обозначения: $\omega_0(x) = -x + cx^{2n+1}$, $\omega_1(x) = 0$, $\omega_2(x, y) = ay^{2n-1} + dx^2y^{2n+3}$.

При $c > 0$ имеем три особые точки: $x_1 = (-1/\sqrt[2n]{c}, 0)$, $x_2 = (0, 0)$, $x_3 = (1/\sqrt[2n]{c}, 0)$. Тогда $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ — седла. При $c \leqslant 0$ единственная особая точка — $(0, 0)$.

Начало будет устойчивым, если $a < 0$. Строим такое семейство вида

$$y^2 = 2\int\limits_a^x \omega_0(x)dx, \tag{2}$$

что каждая из кривых этого семейства определена в $[x_1, x_3]$. Для этого полагаем α, $x \in \in [x_1, x_3]$.

Кривая (2) в точке $x_2 = 0$ имеет симметричные относительно оси абсцисс экстремумы, пересекает ось Ox только в двух точках $x = x_1$, $x = x_3$, не имеет точек перегиба, а следовательно, является замкнутой [1] при изменении параметра α от x_1 до 0. Если $c > 0$, то в (2) можно взять параметр α изменяющимся на бесконечном полуинтервале $]-\infty, 0]$ или $[0, \infty[$, $x \in [\alpha, x_\alpha]$ или $x \in [x_\alpha, \alpha]$, где $\int_a^{x_\alpha} \omega_0(x)dx = 0$, $\alpha \cdot x_\alpha < 0$. Составим функцию $Q(x, y) = y^2 - 2\int_{x_1}^{x_2} \omega_0(x)dx$. Ее производная в силу (1)

$$dQ/dt = 2y^2[y\omega_2(x, y)] = 2y^{2n+2}(bx^2 + ay^2).$$

Известно, что для отсутствия предельного цикла достаточно выполнения условия $a \cdot b > > 0$. Тогда выражение $bx^2 + ay^2$ сохраняет знак для любых x и y, включая и бесконечно малые. Поэтому все кривые семейства (2) являются бесконтактными. Следовательно, уравнение (1) при любом n не имеет предельного цикла. В случае $\alpha < 0$ все интегральные кривые пересекают кривые семейства (2), приближаясь при $t \to \infty$ к $(0, 0)$, а в противном случае — удаляясь от $(0, 0)$. Аналогичная картина и для $c = 0$. Следовательно, уравнение (1) при $\alpha \neq 0$ и любом натуральном n не имеет предельного цикла.

Литература

1. *Барбашин Е.А., Табуева В.А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Наука, 1969.

2. *Латфуллин Г.М.* // Волжский математический сборник. Куйбышев. 1965. Вып.3.