О ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛАХ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Г.Т. Можджер

Гродненский госуниверситет им. Я. Купалы, факультет математики и информатики

Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь

Mog_Gra@tut.by

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' = a_1 \frac{y'y''}{y} + a_2 \frac{y'^3}{y^2} + a_3 y y'' + a_4 y'^2 + a_5 y^2 y'. \tag{1}$$

Найдем условия на коэффициенты уравнения(1), чтобы оно имело первый интеграл вида

$$y^{2k-12}y''^4+\sum_{m=1}^{3}A_m y^{2(k+m)-15}y'^{3-m}y''^3+\sum_{m=1}^{5}B_m y^{2(k+m-8)}y'^{5-m}y''^2+ \\ +\sum_{m=1}^{7}C_m y^{2(k+m)-17}y'^{7-m}y''+\sum_{m=1}^{9}D_m y^{2(k+m-9)}y'^{9-m}+K, \tag{2}$$

где A_m, B_m, C_m, D_m — произвольные постоянные, K — произвольная постоянные интегрирования. Дифференцируя (2) с учетом (1) найдем следующие соотношения:

$$a_2C_1+2D_1(k-8)=0,\quad a_2C_2+a_4C_1+2D_2(k-7)=0,\quad a_2C_3+a_4C_2+a_5C_1+$$
$$+2D_3(k-6)=0,\quad a_2C_4+a_4C_3+a_5C_2+2D_4(k-5)=0,\quad a_2C_5+a_4C_4+a_5C_3+$$
$$+2D_5(k-4)=0,\quad a_2C_6+a_4C_5+a_5C_4+2D_6(k-3)=0,\quad a_2C_7+a_4C_6+a_5C_5+$$
$$+2D_7(k-2)=0,\quad a_4C_7+a_5C_6+2D_8(k-1)=0,$$
$$A_1=-(2a_1+k-6),\quad A_2=-4a_3,\quad B_1=-\frac{A_1}{4}(3a_1+2k-13)-a_2,\quad B_2=\frac{1}{3}(a_3(18a_1+$$
$$+11k-62)-4a_4),\quad B_3=6a_3^2-2a_5-\frac{A_3}{2}(3a_1+2k-9),\quad B_4=-3a_3A_3,$$
$$C_1=-\frac{1}{6}(3a_2A_1+2B_1(a_1+k-7)),\quad C_2=-\frac{1}{5}(3a_2A_2+3a_4A_1+2B_2(a_1+k-6)+$$
$$+2a_3B_1),\quad C_3=-\frac{1}{4}(3a_2A_3+3a_4A_2+3a_5A_1+2B_3(a_1+k-5)+2a_3B_2),$$
$$C_4=-\frac{1}{3}(3a_4A_3+3a_5A_2+2B_4(a_1+k-4)+2a_3B_3),\quad C_5=-\frac{1}{2}(3a_5A_3+$$
$$+2B_5(a_1+k-3)+2a_3B_4),\quad C_6=-2a_3B_5,\quad D_1=-\frac{1}{8}(2a_2B_1+C_1(a_1+2k-15)),$$
$$D_2=-\frac{1}{7}(2a_2B_2+2a_4B_1+C_2(a_1+2k-13)+a_3C_1),\quad D_3=-\frac{1}{6}(2a_2B_3+2a_4B_2+$$
$$+2a_5B_1+C_3(a_1+2k-11)+a_3C_2),\quad D_4=-\frac{1}{5}(2a_2B_4+2a_4B_3+2a_5B_2+C_4(a_1+2k-$$
$$-9)+a_3C_3),\quad D_5=-\frac{1}{4}(2a_2B_5+2a_4B_4+2a_5B_3+C_5(a_1+2k-7)+a_3C_4),$$
$$D_6=-\frac{1}{3}(2a_4B_5+2a_5B_4+C_6(a_1+2k-5)+a_3C_5),$$
$$D_7=-\frac{1}{2}(2a_5B_5+C_7(a_1+2k-3)+a_3C_6),\quad D_8=-a_3C_7,\quad D_9=-\frac{a_5C_7}{2k}. \tag{3}$$

Найдем случаи совместности условий (3) и в результате выделим все классы уравнений (1), имеющие первые интегралы вида (2). В частности, если положить

$$a_1=7-6k/5,\ a_2=-4(k-10)(k-5)/25,\ a_3=a_4=0,$$

то уравнение (1) и первый интеграл (2) примут соответственно вид

$$y'''=(7-6k/5)\frac{y'y''}{y}-\frac{4}{25}(k-10)(k-5)\frac{y'^3}{y^2}+a_5y^2y',$$

$$y^{2k-12}(10kyy''-25a_5y^4+4k(k-5)y'^2)(20kyy''-25a_5y^4+4k(k-10)y'^2)(400k^2y^2y''^2+$$

$$+100k(15a_5+4A_3k)y^5y''+320k^2(k-5)yy'^2y''+64k^2(k-5)^2y'^4-20k(5a_5(k+30)-$$
$$-4kA_3(k-10))y^4y'^2-125a_5(15a_5+4A_3k)y^8)/80000=K. \qquad (4)$$

Таким образом, верна

Теорема. *Если для уравнения (1) выполнены условия (3), то первый интеграл (2) имеет вид (4).*