ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМИ УСЛОВИЯМ ЛИПШИЦА — ЛЯПУНОВА

А.А. Леваков, Т.А. Новик

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, $(\mathcal{F}_t)$ — броуновское движение $W(t)$ и функции $f: R_+ \times R^d \times \Omega \to R^d$, $g: R_+ \times R^d \times \Omega \to R^{d\times r}$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t,\omega) = f(t, x(t,\omega), \omega)dt + g(t, x(t,\omega), \omega)dW(t,\omega). \qquad (1)$$

Определение 1. Под решением $x(t,\omega)$ уравнения (1) с начальным условием $\eta(\omega)$ понимаем d-мерный непрерывный $(\mathcal{F})$-согласованный случайный процесс $x(t,\omega)$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$ такой, что для каждого $t \geqslant 0$ $\int_0^t \|f(s, x(s,\omega), \omega)\|ds < \infty$, $\int_0^t \|g(s, x(s,\omega), \omega)\|^2 ds < \infty$ п.н. и для каждого $t \in R_+$ с вероятностью 1

$$x(t,\omega) = \eta(\omega) + \int_0^t f(s, x(s,\omega), \omega)ds + \int_0^t g(s, x(s,\omega), \omega)dW(s,\omega).$$

Условие А). При каждом x процессы f и g измеримы и $(\mathcal{F})$-согласованы и при всех $a \in R_+$, $T \in R_+$ имеет место неравенство

$$E\Big(\int_0^T \big(\sup_{\|x\|\leqslant a} \|f(t,x,\omega)\| + \sup_{\|x\|\leqslant a} \|g(t,x,\omega)\|^2\big)dt\Big) < \infty.$$

Существует вещественная заданная на R^d трижды непрерывно дифференцируемая определенно положительная функция $V(x)$ такая, что при всех $a \in R_+$, $t \in R_+$, $\|z\| \leqslant a$, $\|y\| \leqslant a$, $\omega \in \Omega$ справедливо неравенство

$$V'_x(y-z)(f(t,y,\omega) - f(t,z,\omega)) +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big(V''_{x^2}(y-z)(g(t,y,\omega) - g(t,z,\omega))(g(t,y,\omega) - g(t,z,\omega))^\top\big) \leqslant k(t,a,\omega)V(y-z),$$

где при каждом $a \in R_+$ $k(t,a,\omega)$ — измеримый $(\mathcal{F})$-согласованный процесс такой, что для любых $T \in R_+$, $a \in R_+$ выполнено неравенство $E(\int_0^T k(t,a,\omega)dt) < \infty$.

Условие В). Существует вещественная неотрицательная заданная на R^d трижды непрерывно дифференцируемая функция $Q(x)$, $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} Q(x) = \infty$, такая, что при всех $t \in R_+$, $x \in R^d$, $\omega \in \Omega$ выполняется неравенство

$$Q'_x(x)f(t,x,\omega) + \frac{1}{2}tr\big(Q''_{x^2}(x)g(t,x,\omega)g^\top(t,x,\omega)\big) \leqslant k_1(t,\omega)(1 + Q(x)),$$

где $k_1(t,\omega)$ — измеримый $(\mathcal{F})$-согласованный процесс такой, что при каждом $T \in R_+$ выполнено неравенство $E(\int_0^T k_1(t,\omega)dt) < \infty$.

Теорема. *Если отображения f и g непрерывны по x и удовлетворяют условиям А) и В), то для любого $(\mathcal{F})$-измеримого вектора $\eta(\omega)$ уравнение (1) имеет единственное решение с начальным условием η.*