

К МЕТОДУ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Н. Лаптинский

Институт технологии металлов НАН Беларуси
Бялыницкого-Бирули 11, 212030 Могилев, Беларусь
intehmet@mogilev.unibel.by

Метод вспомогательных функций играет важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений. К таким функциям относятся специальные функции [1], функции Ляпунова (см., например, [2]) и др. В [3] предложен тип вспомогательных функций, конструируемых с помощью метода вариации параметра.

Данная работа является продолжением и развитием [3, 4]. На основе применения метода [3] для системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x)x + f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где $A \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$, $f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, вспомогательная функция $U = U(t, x)$ определяется как решение задачи

$$\frac{dU}{dt} = A(t, x(t))U, \quad U|_{t=0} = E, \quad (3)$$

$x(t)$ — решение задачи (1), (2), E — единичная матрица.

С помощью этой функции задача (1)–(3) сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$U(t, x(t)) = E + \int_0^t A(\tau, x(\tau))U(\tau, x(\tau))d\tau, \quad x(t) = U(t, x(t)) \left[x_0 + \int_0^t U^{-1}(\tau, x(\tau))f(\tau, x(\tau))d\tau \right].$$

Для иллюстрации применения используемого метода рассмотрена задача Коши для матричного дифференциального уравнения Риккати вида

$$\frac{dX}{dt} = XA(t)X + F(t), \quad X(0) = X_0, \quad (4)$$

где $A(t), F(t)$ — $(n \times n)$ -матрицы класса $\mathcal{C}$.

Вспомогательная функция для задачи (4) определяется как решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dU}{dt} = F(t) \left[E - \int_0^t A(\tau)U(\tau)d\tau \right], \quad U(0) = X_0.$$

Литература

1. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. М.: ГИФМЛ, 1963.
2. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
3. Лаптинский В.Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Лаптинский В.Н. Об одном представлении решений нелинейных дифференциальных систем // Тез. докл. междунар. матем. конф. "Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры". Брест: БрГУ, 2000. С. 42–43.