Математические заметки

том 67 выпуск 6 июнь 2000

УДК 512.54

СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП В ГРУППЕ $PSL_2(\mathbb{C})$

О. М. Матейко, О. И. Тавгень

В работе указываются семейства точных представлений свободного произведения n ($n \geqslant 2$) циклических групп в группу $PSL_2(\mathbb{C})$. Они используются для доказательства обобщения одного из результатов Ри и Мендельсона. Также получен ряд достаточных условий, при которых 2-порожденная подгруппа $\langle A, B\rangle$ группы $PSL_2(\mathbb{C})$ изоморфна свободному произведению своих циклических подгрупп $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$.

Библиография: 14 названий.

Многие вопросы теории групп приводят к необходимости установить свободу тех или иных конкретных линейных групп, и это оказывается подчас нелегкой задачей. Так, например, открытый вопрос о точности представления Бурау группы кос B_4 эквивалентен вопросу о том, порождают ли две матрицы в группе $SL_3(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ свободную группу ранга 2.

Вопрос о свободе линейных групп рассматривался многими математиками. Особенно следует отметить направление, посвященное изучению в группе $PSL_2(\mathbb{C})$ свободных подгрупп, порожденных двумя параболическими элементами. Начало этому направлению положил Санов, который в [1] указал красивое матричное представление группы F_2, доказав, что матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

при $\mu = 2$ порождают свободную группу. Далее было установлено, что это верно для всех комплексных μ, таких что $|\mu| \geqslant 2$, а позже в работах [2], [3], [4] множество чисел μ, для которых эта группа свободна, было значительно расширено. Были найдены также области на комплексной плоскости, где точки, для которых данная группа несвободна, составляют всюду плотное множество.

В некоторых работах исследовалось также, при каких условиях два элемента A и B из группы $PSL_2(\mathbb{R})$ порождают подгруппу, изоморфную свободному произведению циклических групп $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$. Линдон и Ульман [5] получили некоторые достаточные условия для этого, которые формулируются в терминах расположения неподвижных точек элементов A, B, AB и $ABA^{-1}B^{-1}$ при действии их на расширенной действительной оси. Пужицки [6] установил необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа, порожденная в группе $PSL_2(\mathbb{R})$ двумя элементами A и B, является дискретным свободным произведением циклических подгрупп $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$.

Известно, что группа F_2 содержит в качестве подгруппы свободную группу F_n произвольного счетного ранга n. Бахмут и Мочизуки в [7] начали изучение свободных подгрупп ранга 3 в группе $SL_2(\mathbb{C})$, которые не содержатся в известных свободных группах ранга 2. В частности, они рассмотрели группу $G(\alpha,\beta,\gamma)$, порожденную тремя матрицами

$$A=\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\\beta&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1-\gamma&-\gamma\\\gamma&1+\gamma\end{pmatrix},\tag{2}$$

и показали, что при $|\alpha|\geqslant M$, $|\beta|\geqslant M$, где $M=4.45$, $G(\alpha,\beta,\gamma)$ – свободная группа с базой A, B, C. В работах [8], [9] найдены новые значения параметров α, β, γ, при которых $G(\alpha,\beta,\gamma)$ является свободной.

В данной работе мы рассматриваем свободные произведения n ($n\geqslant 2$) циклических подгрупп в группе $PSL_2(\mathbb{C})$. В частности, когда каждая циклическая подгруппа бесконечна, получается свободная группа ранга n, которая при $n=3$ совпадает с группой $G(\alpha,\beta,\gamma)$. Полученный результат, как показано, может применяться при исследовании произведений циклических групп с одним соотношением. Кроме этого, получен ряд достаточных условий, при которых 2-порожденная подгруппа $\langle A,B\rangle$ группы $PSL_2(\mathbb{C})$ изоморфна свободному произведению $\langle A\rangle*\langle B\rangle$ своих циклических подгрупп. Эти условия формулируются в терминах следов матриц A, B и AB. Ранее подобного рода условия были известны, как уже указывалось выше, для 2-порожденных подгрупп $PSL_2(\mathbb{R})$ и для подгрупп $PSL_2(\mathbb{C})$, порожденных двумя параболическими элементами. В нашем же случае каждый из образующих является параболическим, гиперболическим или эллиптическим преобразованием со следом $2\cos(\pi/n)$, $n\geqslant 2$.

Группа $PSL_2(\mathbb{C})$ состоит из пар $\{A,-A\}$, где $A\in SL_2(\mathbb{C})$. Будем записывать элементы группы $PSL_2(\mathbb{C})$ в виде (2×2)-матриц, подразумевая, что матрица A определяет класс $\{A,-A\}$. Группа $PSL_2(\mathbb{C})$ изоморфна группе всех дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}^*$.

При исследовании вопроса о том, какие элементы из $PSL_2(\mathbb{C})$ порождают свободные произведения, ключевую роль играет следующая лемма, которая является несколько измененным и усиленным вариантом теоремы Макбета [10]. Для случая $n=2$ она была сформулирована и доказана в [5].

Лемма 1. *Пусть G – некоторая группа преобразований множества Ω, порожденная своими подгруппами G_1, $G_2,\dots$, G_n, $n\geqslant 2$. Пусть для каждой подгруппы G_i существует непустое множество $P_i\subset\Omega$ такое, что множества P_i попарно не пересекаются и для каждого $g_i\in G_i$, $g_i\neq 1$, выполняется условие*

$$g_i(P_j)\subseteq P_i\qquad\forall\, i,j=\overline{1,n},\quad i\neq j.$$

Тогда если $n>2$, то G есть свободное произведение своих подгрупп $G_1,G_2,\dots,G_n$. Если $n=2$, то G есть свободное произведение $G=G_1*G_2$, или группы G_1 и G_2 обе имеют порядок 2 и G является диэдральной группой.

Если G – подгруппа группы $PSL_2(\mathbb{C})$, то G действует на расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}^*$. Для нахождения множеств $P_i\subset\mathbb{C}^*$, удовлетворяющих условию леммы 1, будем использовать свойства изометрических окружностей (см., например, [11]). Напомним, что для дробно-линейного преобразования $A(z)=(az+b)/(cz+d)$, где $ad-bc=1$, $c\neq 0$, изометрическая окружность задается уравнением $|cz+d|=1$. Если A является параболическим, гиперболическим или эллиптическим преобразованием со следом $2\cos(\pi/n)$, $n \geqslant 2$, и $P = \{z/|cz+d| < 1\} \cup \{z/|cz-a| < 1\}$, $S \subset \mathbb{C}^*$, $S \cap P = \varnothing$, то $A^n(S) \subseteq P$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ такого, что $A^n \neq 1$.

Пусть $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – группа, которую порождают n ($n \geqslant 2$) дробно-линейных преобразований следующего вида

$$A_k = \begin{pmatrix} \delta_k - l\alpha_k & l(\delta_k - \delta_k^{-1}) - l^2\alpha_k \\ \alpha_k & \delta_k^{-1} + l\alpha_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad A_n = \begin{pmatrix} \delta_n & \alpha_n \\ 0 & \delta_n^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$l = \begin{cases} (1-k)/2, & \text{если } k \text{ нечетно}, \\ k/2, & \text{если } k \text{ четно}, \end{cases}$$

$$\delta_k = e^{i\pi/m_k}, \quad m_k \geqslant 2, \quad \text{или} \quad \delta_k = 1, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \qquad k = \overline{1, n}.$$

Если $n = 2$, то группа $G(\alpha_1, \alpha_2)$ порождается матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ \alpha_1 & \delta_1^{-1} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \delta_2 & \alpha_2 \\ 0 & \delta_2^{-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

При $\delta_1, \delta_2 = 1$, $\alpha_1\alpha_2 = \mu^2$ группа $G(\alpha_1, \alpha_2)$ изоморфна $\langle A, B\rangle$, где A, B – матрицы (1), и ее структура достаточно полно исследована в работах [2], [3], [4]. Если $n = 3$, δ_1, δ_2, $\delta_3 = 1$, то группа $G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ порождается элементами вида (2).

Исследуем, при каких $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, группа $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ изоморфна свободному произведению своих циклических подгрупп $\langle A_k\rangle$.

Теорема 1. 1) *Пусть выполняется одно из следующих условий*:

a) $|\alpha_k| \geqslant 4$, $k = \overline{1, n-1}$, $|\alpha_n| \geqslant n$, *если* n *нечетно, и* $|\alpha_n| \geqslant n-1$, *если* n *четно*;
b) $|\alpha_k| \geqslant 4$, $k = \overline{1, n-1}$, $\delta_n = 1$ *и* α_n *не находится внутри ни одного из кругов с центрами в точках* $0, \pm 1, \ldots, \pm(n-2)$ *и радиусами* 1.

Тогда

$$G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \simeq \mathop{*}_{k=1}^{n} \langle A_k\rangle.$$

2) *Пусть* $G(\alpha_1, \alpha_2)$ – *группа, порожденная дробно-линейными преобразованиями вида* (4), *где* $\delta_k = e^{i\pi/m_k}$, $m_k \geqslant 2$, *или* $\delta_k \geqslant 1$, $k = 1, 2$, $|\alpha_1\alpha_2| \geqslant 2|\delta_2|(|\delta_1| + 1)$. *Тогда* $G(\alpha_1, \alpha_2) \simeq \langle A_1\rangle * \langle A_2\rangle$.

Доказательство. Изометрические окружности преобразований A_k и A_k^{-1}, $k = \overline{1, n-1}$, имеют радиусы $1/|\alpha_k|$, а центры в точках $-l - 1/(\alpha_k\delta_k)$ и $-l + \delta_k/\alpha_k$ соответственно. Так как $|\alpha_k| \geqslant 4$, $k = \overline{1, n-1}$, то для каждого $k = \overline{1, n-1}$ эти две окружности находятся внутри круга с центром в точке $-l$ и радиусом $1/2$. Пусть

$$P_k = \left\{\frac{z}{|z + l + 1/(\alpha_k\delta_k)|} < \frac{1}{|\alpha_k|}\right\}, \qquad P_k' = \left\{\frac{z}{|z + l - \delta_k/\alpha_k|} < \frac{1}{|\alpha_k|}\right\},$$

$$S_k = P_k \cup P_k', \quad k = \overline{1, n-1}, \qquad S + \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k, \quad S_n = S^N,$$

где S^N обозначает внутренность дополнения к S. Тогда множества S_k, $k=\overline{1,n}$, попарно не пересекаются. Мы имеем вложение $A_k^m(S_i)\subseteq S_k$, где $k=\overline{1,n-1}$, $i=\overline{1,n}$, $i\neq k$, для всех $m\in\mathbb{Z}$ таких, что $A_k^m\neq 1$. Если $\delta_n=e^{i\pi/m_n}$, то

$$A_n^m(z)=\delta_n^{2m}z+\alpha_n\delta_n^m\frac{\delta_n^m-\delta_n^{-m}}{\delta_n-\delta_n^{-1}}=e^{2i\pi m/m_n}z+e^{i\pi m/m_n}\alpha_n\frac{\sin(\pi m/m_n)}{\sin(\pi/m_n)},$$

а если $\delta_n=1$, то $A_n^m(z)=z+m\alpha_n$. Если n четно, то $n-1$ окружностей с центрами в точках $-l$ и радиусами $1/2$ расположены в круге с центром в нуле и диаметром $n-1$, а если n нечетно, то эти окружности расположены в круге с центром в нуле и диаметром n. Так как выполняются неравенства

$$\left|e^{i\pi m/m_n}\frac{\alpha_n\sin(\pi m/m_n)}{\sin(\pi/m_n)}\right|\geqslant n-1,$$

где $m=1,\dots,m_n-1$, $|m\alpha_n|\geqslant n-1$, где $m\in\mathbb{Z},m\neq 0$, если n четно, и неравенства

$$\left|e^{i\pi m/m_n}\frac{\alpha_n\sin(\pi m/m_n)}{\sin(\pi/m_n)}\right|\geqslant n,$$

где $m=1,\dots,m_n-1$, $|m\alpha_n|\geqslant n$, где $m\in\mathbb{Z},m\neq 0$, если n нечетно, то выполнено вложение $A_n^m(S_i)\subseteq S_n$, где $i=\overline{1,n-1}$, для всех $m\in\mathbb{Z}$ таких, что $A_n^m\neq 1$. Если $\delta_n=1$, то это условие также будет выполняться для всех α_n, которые не находятся внутри ни одного из кругов с центрами в точках 0, $\pm1,\dots,\pm(n-2)$ и радиусами 1. Применение леммы 1 завершает доказательство первого пункта теоремы. Доказательство второго пункта теоремы проводится аналогично.

Следствие 1. *Пусть* $|\alpha_k|\geqslant 4$, $k=\overline{0,n-1}$. *Тогда матрицы*

$$A_k=\begin{pmatrix}1-k\alpha_k & -k^2\alpha_k\\ \alpha_k & 1+k\alpha_k\end{pmatrix}\tag{5}$$

порождают свободную группу ранга n с базой A_0, $A_1,\dots,$ A_{n-1}.

Отметим, что если $\alpha_0=\alpha_1=\dots=\alpha_{n-1}=\alpha$, то группа, порожденная матрицами (5), содержится в известной свободной группе ранга 2, порожденной матрицами

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\-\alpha&1\end{pmatrix},$$

так как элементы A^kBA^{-k}, $k=\overline{0,n-1}$, порождают свободную группу ранга n, если $|\alpha|\geqslant 4$.

Следствие 2. *Пусть* A, $B\in PSL_2(\mathbb{C})$, $\operatorname{tr}A=\lambda_1$, $\operatorname{tr}B=\lambda_2$ *и выполняется одно из следующих условий*:

1) $\lambda_1=2\cos(\pi/2)$, $n\geqslant 2$, $\lambda_2=2\cos(\pi/m)$, $m\geqslant 2$, $\lambda_1+\lambda_2>0$ *и*

$$|\operatorname{tr}(AB)-\cos(\pi/n+\pi/m)|\geqslant 4;$$

2) $\lambda_1=2\cos(\pi/n)$, $n\geqslant 2$, *или* $\lambda_1=2$, $\lambda_2=2$ *и* $|\operatorname{tr}(AB)-\lambda_1|\geqslant 4$;

3) $\lambda_1 = 2\cos(\pi/n)$, $n \geqslant 2$, $\lambda_2 > 2$ *и*
$$\left|\operatorname{tr}(AB) - \left(\lambda_2\cos(\pi/n) + i\sqrt{\lambda_2^2-4}\sin(\pi/n)\right)\right| \geqslant 2(\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2-4});$$
4) $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 > 2$ *и* $|\operatorname{tr}(AB) - \lambda_2| \geqslant 2(\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2-4})$;
5) $\lambda_1 > 2$, $\lambda_2 > 2$ *и*
$$\left|\operatorname{tr}(AB) - \frac{\lambda_1\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2-4}\sqrt{\lambda_2^2-4}}{2}\right| \geqslant \frac{(\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2-4})(\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1^2-4}+2)}{2}.$$

Тогда $\langle A,B\rangle \simeq \langle A\rangle * \langle B\rangle$.

Доказательство. Преобразования A и B не имеют общих неподвижных точек. Действительно, если такая точка ω существует, то после соответствующего сопряжения мы можем считать, что $\omega = \infty$. Покажем, что неравенства, которые приведены в формулировке, в этом случае не выполняются. Пусть x_i обозначает выражение, стоящее под знаком модуля в условии под номером i. Тогда мы имеем: $|x_1| < 4$, $x_2 = 0$, $|x_3| \leqslant 2\sqrt{\lambda_2^2-4}$, $x_4 = 0$, $|x_5| \leqslant \sqrt{\lambda_1^2-4}\sqrt{\lambda_2^2-4}$, откуда и следует невыполнимость этих неравенств.

После сопряжения мы можем предположить, что одна из неподвижных точек A равна 0, а одна из неподвижных точек B равна ∞, откуда $A = A_1$, $B = A_2$, где A_1, A_2 – матрицы вида (4) для некоторых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Так как
$$\langle A,B\rangle = \langle A^{-1},B\rangle = \langle A,B^{-1}\rangle = \langle A^{-1},B^{-1}\rangle,$$
то мы можем считать, что $\delta_k = e^{i\pi/m_k}$, $m_k \geqslant 2$, или $\delta_k \geqslant 1$, $k = 1,2$. В случае, когда $\delta_k > 1$, мы получаем, что $\delta_k = (\lambda_k + \sqrt{\lambda_k^2-4})/2$. Теперь условия 1–5 получаются, если вычислить $\operatorname{tr}(AB)$ и применить второй пункт теоремы 1.

Пусть группа G имеет следующий вид:
$$G = \left\langle a_1, a_2, \dots, a_n;\ a_i^{e_i} = 1,\ i = \overline{1,n},\ R^m(a_1,\dots,a_n) = 1\right\rangle, \tag{6}$$
где $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, $e_i = 0$ или $e_i \geqslant 2$, $i = \overline{1,n}$, и $R(a_1,\dots,a_n)$ – циклически приведенное слово от свободных порождающих $a_1,\dots,a_n$, в которое входят все элементы $a_1,\dots$, a_n. Она называется *произведением циклических групп с одним соотношением* (см., например, [12]). Файн, Хови и Розенбергер в [12] доказали, что для таких групп выполняется теорема о свободе, состоящая в том, что подгруппа, порожденная элементами $a_1,\dots, a_{n-1}$, является свободным произведением $\langle a_1; a_1^{e_1}\rangle * \dots * \langle a_{n-1}^{e_{n-1}}\rangle$ циклических подгрупп.

Основная идея доказательства состоит в построении нетривиального представления $\nu\colon G \to PSL_2(\mathbb{C})$ такого, что ν отображает эпиморфно подгруппу, порожденную элементами $a_1,\dots,a_{n-1}$, на свободное произведение циклических групп.

Отметим, что отображение ν можно определить следующим образом:
$$\nu(a_i) = A_i,\quad i = \overline{1,n-1},\qquad \nu(a_n) = A_n = \begin{pmatrix} \delta_n & x\\ 0 & \delta_n^{-1}\end{pmatrix},$$
где A_i – матрицы вида (3) с $\alpha_i = 4$, $i = \overline{1,n-1}$, $\delta_i = e^{i\pi/e_i}$, если $e_i \geqslant 2$, и $\delta_i = 1$, если $e_i = 0$, $i = \overline{1,n}$. Теперь, так же, как в [12], можно показать, что существует такое число x, при котором ν – гомоморфизм. При этом доказательство несколько упрощается, так как известен конкретный образ представления ν. В следующей теореме, используя эту же идею, мы доказываем обобщение результата Ри и Мендельсона [13] о том, что в группе $\langle a_1,a_2; R^m(a_1,a_2) = 1\rangle$ элементы a_1, a_2^t порождают свободную группу для достаточно больших t.

Теорема 2. *Пусть $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; R^m(a_1, \dots, a_n) = 1\rangle$, где $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$ и $R(a_1, \dots, a_n)$ – циклически приведенное слово от свободных порождающих $a_1, \dots, a_n$, в которое входят все элементы $a_1, \dots, a_n$. Тогда существует целое число s такое, что элементы $a_1, a_2, \dots, a_n^t$ порождают свободную группу для всех $t \geqslant s$.*

Доказательство. Определим отображение $\nu\colon G \to PSL_2(\mathbb{C})$ следующим образом:

$$\nu(a_i) = A_i = \begin{pmatrix} 1-4i & -4i^2 \\ 4 & 1+4i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad \nu(a_n) = A_n = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По следствию 1 матрицы A_i, $i = \overline{1, n-1}$, свободно порождают свободную группу ранга $n-1$. Рассмотрим определяющее слово $R(a_1, \dots, a_n)$. Подставляя $A_1, A_2, \dots, A_n$ в R, мы получаем матрицу

$$R(a_1, A_2, \dots, A_n) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix},$$

где f_i, $i = \overline{1, 4}$, – многочлены от x.

Если $\operatorname{tr}\bigl(R(A_1, A_2, \dots, A_n)\bigr) = f_1 + f_4$ будет многочленом, отличным от тождественной константы, то, взяв в качестве x корень уравнения $f_1(x) + f_4(x) = 2\cos(\pi/m)$, мы получим, что ν – гомоморфизм.

Без ограничения общности мы можем считать, что R имеет следующий вид:

$$R(A_1, A_2, \dots, A_n) = B_1 A_n^{t_1} B_2 A_n^{t_2} \cdots B_k A_n^{t_k},$$

где B_i – нетривиальное слово от $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$, $t_i \neq 0$, $k \geqslant 1$.

Предположим, что $B_i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда $c \neq 0$, так как в противном случае B_i и A_n порождают метабелеву группу при всех $x \in \mathbb{C}$, что противоречит теореме 1. Каждый множитель $B_i A_n^{t_i}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix},$$

где h_1, h_2, h_3, h_4 – многочлены от x, имеющие степени < 1, $\leqslant 1, 0, 1$ соответственно. Тогда индукцией по $k \geqslant 1$ мы получаем, что в R многочлены f_1, f_2, f_3, f_4 имеют степени $< k$, $\leqslant k$, $k-1$, k соответственно. Следовательно, многочлен $f_1 + f_4$ имеет степень k, т.е. не является постоянным, а значит, можно выбрать такое x, что ν – гомоморфизм. Покажем, что нуль не является корнем многочлена $f_1(x) + f_4(x) - 2\cos(\pi/m)$. Действительно, если предположить противное, то $\nu(a_n) = 1$, ν – гомоморфизм и $\operatorname{tr}\bigl(R_1(A_1, \dots, A_{n-1})\bigr) = 2\cos(\pi/m)$, где слово R_1 получается из R удалением всех символов a_n. Это противоречит тому, что $A_1, \dots, A_{n-1}$ свободно порождают свободную группу ранга $n-1$. Пусть x_0 – корень этого многочлена. Выбираем $s \in \mathbb{N}$ такое, что sx_0 не находится внутри ни одного из кругов с центрами в точках $0, \pm 1, \dots, \pm(n-2)$ и радиусами 1. Тогда по теореме 1 группа, порожденная матрицами A_i, $i = \overline{1, n-1}$, и матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & tx_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является свободной при всех $t \geqslant s$.

Пусть $\langle A, B\rangle$ подгруппа $PSL_2(\mathbb{C})$, где каждый из образующих является параболическим, гиперболическим или эллиптическим преобразованием со следом $2\cos(\pi/n)$, $n \geqslant 2$. Если порядок элементов A и B равен 2 и они имеют общую неподвижную точку, то легко видеть, что $\langle A, B\rangle \simeq \langle A\rangle * \langle B\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ при условии, что $A \neq B$.

Если порядок элементов A и B одновременно не равен 2, то необходимым условием разложимости группы $\langle A, B\rangle$ в свободное произведение $\langle A\rangle * \langle B\rangle$ является отсутствие у A и B общих неподвижных точек, так как в противном случае они порождают метабелеву группу. Если у A и B нет общих неподвижных точек, то после соответствующего сопряжения мы можем считать, что элементы A и B имеют вид (4). Затем, зная значения параметров α_1 и α_2, при которых $G(\alpha_1, \alpha_2) \simeq \langle A_1\rangle * \langle A_2\rangle$, можно, как это сделано в следствии 2, получить достаточные условия, при которых $\langle A, B\rangle \simeq \langle A\rangle * \langle B\rangle$. Если же сопрячь A и B таким элементом S, что $SAS^{-1}(\infty) = SBS^{-1}(\infty) = 0$, то можно считать, что группа $\langle A, B\rangle$ порождается матрицами следующего вида:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \qquad R_\rho = \begin{pmatrix} 0 & -\rho \\ 1/\rho & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что такое преобразование S существует. Действительно, пусть ω – неподвижная точка преобразования $A^{-1}B$ и пусть $\omega_1 = A(\omega)$. Тогда $\omega \neq \omega_1$ и S – преобразование такое, что $S(\omega) = \infty$, $S(\omega_1) = 0$.

Обозначим $G_\rho = \langle Q, R_\rho\rangle$, где $\rho \in \mathbb{C}$, $\rho \neq 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 \geqslant 2$ или $\lambda_1 = 2\cos(\pi/p)$, $p \geqslant 2$, и $\lambda_2 \geqslant 0$ или $\lambda_2 = 2\cos(\pi/q)$, $q \geqslant 2$. Найдем значения параметра ρ, при котором $G_\rho \simeq \langle Q\rangle * \langle R_\rho\rangle$. В частном случае, когда Q и R_ρ имеют конечный порядок, это сделано в работе [14].

Пусть a_n^i, $i = 1, 2$, две последовательности, где $a_0^i = 0$, $a_1^i = 1$, $a_{n+1}^i = \lambda_i a_n^i - a_{n-1}^i$. Тогда формула n-го члена последовательности имеет вид

$$a_n^i = \frac{(p_1^i)^n - (p_2^i)^n}{\sqrt{\lambda_i^2 - 4}}, \qquad i = 1, 2,$$

если $\lambda_i \neq 2$, и $a_n^i = n$, если $\lambda_i = 2$, $i = 1, 2$, где

$$p_1^i = \frac{\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 - 4}}{2}, \qquad p_2^i = \frac{\lambda_i - \sqrt{\lambda_i^2 - 4}}{2}.$$

Положим $a_{-n}^i = -a_n^i$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда по индукции несложно показать, что при всех $n \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства

$$Q^n = \begin{pmatrix} -a_{n-1}^1 & a_n^1 \\ -a_n^1 & a_{n+1}^1 \end{pmatrix}, \qquad R_\rho^n = \begin{pmatrix} -a_{n-1}^2 & -\rho a_n^2 \\ a_n^2/\rho & a_{n+1}^2 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Пусть $\rho \in S$, где $S = \{\rho \in \mathbb{C}\colon |\rho| \in (0; 1/(t_1 t_2)) \cup (t_1 t_2; +\infty),\ t_i = (\lambda_i + \sqrt{4 + \lambda_i^2})/2,\ i = 1, 2\}$, если $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, и $S = \{\rho \in \mathbb{C}\colon \rho \neq 0, |\rho| \neq 1\}$, если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда $G_\rho \simeq \langle Q\rangle * \langle R_\rho\rangle$.*

Доказательство. Очевидно, что $G_\rho \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $|\rho| \neq 1$. Пусть теперь $\lambda_1 > 0$ или $\lambda_2 > 0$. Достаточно доказать теорему в случае, когда $|\rho| \geqslant t_1 t_2$, так как $G_\rho \simeq G_{1/\rho}$. При доказательстве будем использовать равенства $a^i_{n+1} = \lambda_i a^i_n - a^i_{n-1}$, $1/t_i + \lambda_i = t_i$, $i = 1, 2$. Пусть

$$S_1 = \left\{\frac{z}{|z|} > t_1\right\}, S_2 = \left\{\frac{z}{|z|} < t_1\right\}, S_3 = \left\{\frac{z}{|z|} = t_1\right\} = \{t_1 e^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi)\}.$$

Так как выполняется неравенство

$$\left|\frac{-a^1_{n-1} t_1 e^{i\varphi} + a^1_n}{-a^1_n t_1 e^{i\varphi} + a^1_{n+1}}\right| \leqslant \frac{a^1_{n-1} t_1 + a^1_n}{a^1_n t_1 - a^1_{n+1}} = \frac{a^1_{n-1} t_1 + a^1_n}{a^1_n / t_1 + a^1_{n-1}} = t_1,$$

т.е. $|Q^n(S_3)| \leqslant t_1$, $n \in \mathbb{Z}$, то дробно-линейные преобразования $Q^n(z)$ отображают окружность S_3 в окружность, которая в ней содержится. Пусть $z_n = a^1_{n+1}/a^1_n$, где $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, если $\lambda_1 \geqslant 2$, и $n = 1, 2, \dots, p-1$, если $\lambda_1 = 2\cos(\pi/p)$, $p \geqslant 2$. Тогда, так как $z_n = \lambda_1 - a^1_{n-1}/a^1_n \leqslant \lambda_1 < t_1$, $z_n \geqslant 0$ и $Q^n(z_n) = \infty$, мы получаем, что $Q^n(S_1) \subseteq S_2$. Пусть $|\rho| \geqslant t_1 t_2$. Тогда выполняется неравенство

$$\left|\frac{a^2_{n-1} t_1 e^{i\varphi} + \rho a^2_n}{a^2_n t_1 e^{i\varphi}/\rho + a^2_{n+1}}\right| \geqslant \frac{a^2_n t_1 t_2 - t_1 a^2_{n-1}}{a^2_n / t_2 + a^2_{n+1}} = \frac{(a^2_n t_2 - a^2_{n-1}) t_1}{a^2_n t_2 + a^2_{n+1} - a^2_n \lambda_2} = t_1,$$

т.е. $|R^n_\rho(S_3)| \geqslant t_1$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому дробно-линейные преобразования $R^n_\rho(z)$ отображают окружность S_3 в окружность, в которой S_3 содержится, или в окружность, которая лежит вне окружности S_3, или в прямую, которая касается S_3 или не пересекается с ней. Пусть $z_n = -\rho a^2_n / a^2_{n-1}$, где $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, если $\lambda_2 \geqslant 2$, и $n = 1, 2, \dots, p-1$, если $\lambda_2 = 2\cos(\pi/p)$, $p \geqslant 2$. Так как $a^2_n t_2 / a^2_{n-1} > 1$ и $|\rho| \geqslant t_1 t_2$, то $|z_n| > t_1$. Учитывая, что $R^n_\rho(z_n) = 0$, мы получаем вложение $R^n_\rho(S_2) \subseteq S_1$. Применение леммы 1 завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Если λ_1, λ_2 – алгебраические числа и $\rho = t$, где t трансцендентно, то $G_\rho \simeq \langle Q \rangle * \langle R_\rho \rangle$. Действительно, рассмотрим нетривиальное слово

$$W = Q^{\alpha_1} R^{\beta_1}_\rho Q^{\alpha_2} R^{\beta_2}_\rho \dots Q^{\alpha_k} R^{\beta_k}_\rho,$$

где $k \geqslant 1$, α_i, β_i, $i = \overline{1, k}$, – целые числа, отличные от нуля. Тогда в матричной форме оно имеет вид:

$$W_t = \frac{1}{t^m} \begin{pmatrix} p_1(t) & p_2(t) \\ p_3(t) & p_4(t) \end{pmatrix},$$

где $p_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, – многочлены от переменной t, коэффициенты которых – алгебраические числа. Если $W_t = E_2$, то и $W_\rho = E_2$ для всех $\rho \in \mathbb{C}$, $\rho \neq 0$. Это противоречит существованию чисел ρ, для которых $G_\rho \simeq \langle Q \rangle * \langle R_\rho \rangle$.

Следствие 3. *Пусть* A, $B \in PSL_2(\mathbb{C})$, $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1$, $\operatorname{tr}(B) = \lambda_2$, *где* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geqslant 2$ *или* $\lambda_i = 2\cos(\pi/n)$, $n \geqslant 2$, $i = 1, 2$, $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, *и пусть выполняется одно из следующих условий*:

1) $|\operatorname{tr}(A^{-1}B)| \geqslant \left(\lambda_1 \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2 + 4}\sqrt{\lambda_2^2 + 4}\right)/2$.

2) λ_1, λ_2 – *алгебраические числа и* $\operatorname{tr}(A^{-1}B)$ – *трансцендентное число*.

Тогда $\langle A, B \rangle \simeq \langle A \rangle * \langle B \rangle$.

Доказательство. Покажем, что A и B не имеют общих неподвижных точек. Действительно, если такая точка существует, то после соответствующего сопряжения мы можем считать, что она равна ∞, и тогда $\operatorname{tr} A^{-1}B = \bigl(\lambda_1\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_1^2-4}\sqrt{\lambda_2^2-4}\bigr)/2$. Это число является алгебраическим, если λ_1 и λ_2 – алгебраические числа, и

$$|\operatorname{tr} A^{-1}B| \leqslant \frac{\lambda_1\lambda_2 + |\sqrt{\lambda_1^2-4}\sqrt{\lambda_2^2-4}|}{2} < \frac{\lambda_1\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1^2+4}\sqrt{\lambda_2^2+4}}{2},$$

что противоречит условиям 1 и 2 следствия. Поэтому мы можем предположить, что $A = Q$, $B = R_\rho$ для некоторого $\rho \in \mathbb{C}$. Так как $\operatorname{tr} A^{-1}B$ тогда равен $-(\rho+\rho^{-1})$, то из условия 1 следует, что $|\rho+\rho^{-1}| \geqslant t_1t_2 + 1/(t_1t_2)$, где $t_i = (\lambda_i + \sqrt{4+\lambda_i^2})/2$, $i=1,2$, откуда $|\rho| \geqslant t_1t_2$, а из условия 2 следует, что ρ трансцендентно. Поэтому из теоремы 3 и замечания 1 следует, что $\langle A, B\rangle \simeq \langle A\rangle * \langle B\rangle$.

Замечание 2. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, т.е. порядок A и B равен 2, то условия 1 следствий 2 и 3 остаются справедливыми, если в них знак $\geqslant$ заменить на знак $>$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Санов И. Н. Свойство одного представления свободной группы // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57. №7. С. 657–659.

[2] Chang S. T., Jennings S. A., Ree R. On certain matrices which generate free groups // Canad. J. Math. 1958. V. 10. P. 279–284.

[3] Lyndon R. C., Ullman J. L. Groups generated by two parabolic linear fractional transformations // Canad. J. Math. 1969. V. 21. №6. P. 1388–1403.

[4] Игнатов Ю. А. Свободные и несвободные подгруппы $PSL_2(\mathbb{C})$, порожденные двумя параболическими элементами // Матем. сб. 1978. Т. 106. №3. С. 372–379.

[5] Lyndon R. C., Ullman J. L. Pairs of real 2-by-2 matrices that generate free products // Michigan Math. J. 1968. V. 15. P. 161–166.

[6] Purzitsky N. Two generator discrete free products // Math. Z. 1972. V. 126. P. 209–223.

[7] Bachmuth S., Mochizuki H. Triples of 2×2-matrices which generate free groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 59. №1. P. 25–28.

[8] Игнатов Ю. А. Группы дробно-линейных преобразований, порожденных тремя элементами // Матем. заметки. 1980. Т. 27. №4. С. 507–513.

[9] Мерзляков Ю. И. Матричные представления свободных групп // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238. №3. С. 527–530.

[10] Macbeath A. M. Packings, free products and residually finite groups // Proc. Camb. Phil. Soc. 1963. V. 59. P. 555–558.

[11] Lehner J. Discontinuous groups and automorphic functions. Providence: Amer. Math. Soc., 1964.

[12] Fine B., Howie J., Rosenberger G. One-relator quotients and free product of cyclics // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 102. P. 249–254.

[13] Ree R., Mendelsohn N. S. Free subgroups of groups with single defining relation // Arch. Math. 1968. V. 19. №6. P. 577–580.

[14] Матейко О. М. Линейные двумерные представления свободного произведения двух конечных циклических групп // Изв. АН Беларуси. Сер. физ. -матем. наук. 1997. №1. С. 46–49.

Белорусский государственный университет

Поступило
04.11.1998