К ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.И. Зубов, Н.И. Зубов

Санкт-Петербургский государственный университет

Библиотечная пл. 2, 198104 Старый Петергоф, Россия

a_v_zubov@mail.ru

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с обратной связью по состоянию вида:

$$y'_\tau = B(\tau)y + b_1(\tau)\delta, \quad \delta = S_1^{(*)}(\tau)y.$$

Сделаем в системе замену независимой переменной $dt = (1 + \|B(\tau)\|)d\tau$.

Поскольку $B(\tau)$ непрерывна, то соответствие $t \leftrightarrow \tau$ есть диффеоморфизм, причем при $\tau \in (-\infty, +\infty)$ и $t \in (-\infty, +\infty)$. Также отметим, что интеграл $\int_0^\infty (1 + \|B(\tau)\|)d\tau = \infty$, т. е. расходится. Введем следующие обозначения:

$$A(t) = \frac{B(\tau(t))}{(1 + \|B(\tau(t))\|)}, \quad b(t) = \frac{b_1(\tau(t))}{(1 + \|B(\tau(t))\|)}, \quad S(t) = S_1(\tau(t)), \quad x(t) = y(\tau(t)).$$

Тогда уравнения замкнутой системы перепишутся в виде:

$$\dot{x} = (A(t) + b(t)S^*(t))x, \tag{1}$$

причем $A(t) \in C_1$ и $||A(t)|| \leqslant m < \infty, m$ - некоторое число.

Допустим, что выполнено соотношение $B'(\tau)/||B(\tau)||^2 \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Оценим при этом условии предельные свойства матрицы $\dot{A}(t)$. Имеем:

$$||\dot{A}(t)|| = \left\| \left(\frac{B(\tau)}{1 + ||B(\tau)||} \right)'_\tau \cdot \frac{d\tau}{dt} \right\| \leqslant \frac{1}{1 + ||B(\tau)||} \cdot \frac{||B'(1 + ||B||) - B(||B||)'||}{(1 + ||B(\tau)||)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1 + ||B||)^3} \cdot (||B'|| \cdot (1 + ||B||) + |(||B||)'| \cdot ||B||) < \frac{||B'|| + |(||B||)'|}{(1 + ||B||)^2}.$$

С учетом соотношения $||B'|| \geqslant |(||B||)'|$ получаем:

$$||\dot{A}(t)|| < 2\frac{||B'_\tau(\tau(t))||}{(1 + ||B'(\tau(t))||)^2}.$$

Условия $\tau \to \infty$ и $t \to \infty$ эквивалентны, следовательно $||\dot{A}(t)|| \to 0$ при $t \to \infty$.

Пусть при каждом фиксированном t пара $(A(t), b(t))$ — вполне управляема по Калману, т.е. матрица $K(t) = \left\{ A^{n-1}(t)b(t), \ldots, A(t)b(t), b(t) \right\}$ удовлетворяет условию $\det K(t) \neq 0$. Поскольку матрица $A(t)$ — ограниченная, то при ограниченном векторе $b(t)$ будет выполнено условие $||K(t)|| \leqslant m_1 < \infty$. Очевидно, при $\dot{b}(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$ будет выполнено условие $\dot{K}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Известно, что матрица $K_0(t)$ переводит матрицу $A(t)$ во фробениусову матрицу $F(t)$, а вектор $b(t)$ переходит в орт e_n, т.е. $A(t) = K_0(t)F(t)K_0^{-1}(t)$, $b(t) = K_0(t)e_n$. С учетом сказанного, перепишем матрицу системы (1) в виде: $D(t) = K_0(F(t) + e_n\bar{S}^*(t))K_0^{-1}(t)$, где $\bar{S}^*(t) = S^*K_0(t)$ может быть выбран произвольно. Выберем $\bar{S}^* = \alpha^*(t) - \alpha_0^*$, где $\alpha^*(t)$ — последняя строка матрицы $F(t)$ и α_0^* - строка, составленная из коэффициентов некоторого гурвицева полинома. При этих условиях матрица $D(t) = K_0(F(t) + e_n\bar{S}^*(t))K_0^{-1}(t) = A(t) + {} + b(t)S^*(t)$ оказывается гурвицевой, причем $||\dot{D}(t)|| \to 0$. Следовательно, замкнутая система (1) асимптотически устойчива в целом.