ЧЕТНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

С.П. Дубровская

Гомельский государственный университет им.Ф.Скорины, математический факультет
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
dubr_sv@mail.ru

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = a_{11}(t)x + a_{12}(t)y, \quad \dot{y} = a_{21}(t)x + a_{22}(t)y, \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$ – достаточное число раз непрерывно-дифференцируемые функции.

Функции $a_{1j}(t) + a_{1j}(-t)$ $(j = 1, 2)$ запишем в виде

$$a_{ij}(t) + a_{ij}(-t) = 2t^{n_i}\alpha_{ij}(t).$$

Если $(a_{i1}(t) + a_{i1}(-t))^2 + (a_{i2}(t) + a_{i2}(-t))^2 \neq 0$, то $n_i \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, а $\alpha_{ij}(j = 1, 2)$ — непрерывно-дифференцируемые функции такие, что $\alpha_{11}^2(t) + \alpha_{12}^2(t) \neq 0$.

Если $a_{i1}(t) + a_{i1}(-t) \equiv a_{i2}(t) + a_{i2}(-t) \equiv 0$, то $n_i = 0$, $\alpha_{i1}(t) \equiv \alpha_{i2}(t) \equiv 0$.

Положим

$$\beta_{11}(t) = \dot{\alpha}_{11}(t) + \alpha_{11}(t)a_{11}(t) + \alpha_{12}(t)a_{21}(t), \beta_{12}(t) = \dot{\alpha}_{12}(t) + \alpha_{11}(t)a_{12}(t) + \alpha_{12}(t)a_{22}(t),$$

$$\Delta(t) = \alpha_{22}(t)\alpha_{11}(t) - \alpha_{12}(t)\alpha_{21}(t) \neq 0.$$

Справедливы теоремы.

Теорема 1. *Все решения системы (1) являются четными тогда и только тогда, когда правая часть системы (1) нечетна по t.*

Теорема 2. *Пусть выполнена одна из следующих групп условий:*

I. 1) $1)\alpha_{11}^2(0) + \alpha_{12}^2(0) \neq 0$; $2)\Delta(t) \equiv 0$; $3)\beta_{12}(t)\alpha_{11}(t) - \beta_{11}(t)\alpha_{12}(t) \equiv 0$.

II. 1) $1)\alpha_{11}(t) \equiv \alpha_{12}(t) \equiv 0$; $2)\alpha_{21}^2(0) + \alpha_{22}^2(0) \neq 0$; $3)\alpha_{21}(t)\beta_{22}(t) - \alpha_{22}(t)\beta_{21}(t) \equiv 0$.

Тогда четными являются решения, начальные данные которых удовлетворяют условию $\alpha_{k1}(0)x_0 + \alpha_{k2}(0)y_0 \equiv 0(k = 1$, *если выполнены условия группы I,* $k = 2$, *если выполнены условия группы II).*

Теорема 3. *Пусть выполнена одна из следующих групп условий:*

I. 1) $\alpha_{11}^2(0) + \alpha_{12}^2(0) \neq 0$; $2)\Delta(t) \neq 0$.

II. 1) $\alpha_{11}^2(0) + \alpha_{12}^2(0) \neq 0$; $2)\Delta(t) \equiv 0$; $3)\beta_{12}(t)\alpha_{11}(t) - \beta_{11}(t)\alpha_{12}(t) \equiv 0$.

III. 1) $\alpha_{11}(t) \equiv \alpha_{12}(t) \equiv 0$; $2)\alpha_{21}^2(0) + \alpha_{22}^2(0) \neq 0$; $3)\alpha_{21}(t)\beta_{22}(t) - \alpha_{22}(t)\beta_{21}(t) \equiv 0$.

Тогда лишь тривиальное решение системы (1) является четным.