ПОСТРОЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА ПУТЕМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В.В. Дикусар, Н.В. Зубов, С.Г. Зеленков, М.С. Лопатин

ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Вавилова 40, 119991 Москва, Россия

В работе предлагается метод построения минимального многочлена с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Зная коэффициенты минимального многочлена легко решить вопрос об устойчивости или неустойчивости матрицы системы первого приближения с помощью метода Рауса или метода понижения порядка.

Пусть A — вещественная постоянная матрица размера $n \times n$. Поставим задачу поиска минимального многочлена этой матрицы, т.е. многочлена наименьшей степени, аннулирующего матрицу A с коэффициентом при старшей степени, равным единице. Таким образом, минимальный многочлен имеет вид: $f(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0$, причем выполняется матричное тождество: $A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \ldots + c_1A + c_0E = 0$.

Теорема 1. *Степень минимального многочлена равна* $k+1$, *если матрицы*

$$A^k,\ A^{k-1}, \ldots, A,\ A^0; A^0 = E, \tag{1}$$

линейно независимы, а матрицы следующего множества линейно зависимы:

$$A^{k+1},\ A^k,\ A^{k-1}, \ldots,\ A,\ E. \tag{2}$$

Введем понятие развернутой матрицы B_k для матричной совокупности (1). Эта матрица размера $n^2 \times (k+1)$, столбцы которой составлены из столбцов $A_{im}, i = \overline{1,n}$, матриц A^m, $m = \overline{k,0}$, записанных один под другим подряд, начиная с первого столбца матрицы.

Теорема 2. *Если для первого из чисел* $k = \overline{0,n}$ *система линейных алгебраических уравнений*

$$B_kC = A_{k+1}, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T \tag{3}$$

имеет решение, то минимальный многочлен матрицы A *имеет вид:*

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k\lambda^k - c_{k-1}\lambda^{k-1} - \ldots - c_1\lambda - c_0 = 0. \tag{4}$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена (4) $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$ — решение системы линейных алгебраических уравнений (3).

Замечание 1. Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$ системы линейных алгебраических уравнений (3) для наименьшего целого числа k, $k = \overline{1,n}$. При этом величины $-c_k$, $-c_{k-1}$, $\ldots$, $-c_0$ будут коэффициентами минимального многочлена (4).