ВЕЩЕСТВЕННЫЙ РАДИУС УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ МАТРИЦ, УСТОЙЧИВЫХ ПО ВАЖЕВСКОМУ

В.В. Дикусар, Н.В. Зубов, С.Г. Зеленков, М.С. Лопатин

ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Вавилова 40, 119991 Москва, Россия

Оценка робастной устойчивости систем первого приближения в терминах матричных коэффициентов этих систем является одной из основных задач. Предлагается новый подход использования квадратичной формы для построения выпуклых множеств устойчивых матриц и вычисления вещественного радиуса устойчивости.

Для вещественной постоянной матрицы размера $n \times n$ известно представление:

$$2P = P + P^T + P - P^T = 2H + 2L, \quad H^T = H, \quad L^T = -L,$$

где $2H = P + P^T$ — симметрическая, а $2L = P - P^T$ кососимметрическая матрицы.

Справедлива теорема Бендиксона.

Теорема 1. *Пусть величина $a+ib$ является собственным числом матрицы P , тогда справедливы неравенства:*

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i \leqslant a \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i, \quad |b| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \mu_i,$$

где λ_i, $\pm i\mu_i$ — собственные числа матриц H, L соответственно.

Из теоремы вытекает, что матрица P будет устойчивой, если симметрическая матрица $2H = P + P^T$ будет устойчивой, т.е. все ее собственные числа будут отрицательны.

Определение 1. *Будем называть матрицу P устойчивой по Важевскому, если матрица $2H = P + P^T$ является устойчивой.*

Очевидно, что если матрица P устойчива по Важевскому, то она устойчива. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Теорема 2. *Пусть вещественные матрицы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ размера $n \times n$ устойчивы по Важевскому, тогда их любая выпуклая линейная комбинация*

$$P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = a, \quad a > 0,$$

также устойчива по Важевскому.

Теорема 2. верна и для нестационарных матриц $P_j(t)$, $j = \overline{1,m}$, для которых спектр симметрических матриц $2H_j(t) = P_j(t) + P_j(t)^T$ отделен от нуля.

Определение 2. *Будем называть вещественным радиусом устойчивости по Важевскому матрицы P наибольшее из чисел γ , при котором матрица $P + \Delta$ устойчива по Важевскому, где матрица Δ удовлетворяет условию $\|\Delta\| < \gamma$. Здесь $\|\Delta\|$ – спектральная норма.*

Теорема 3. *Если матрица P устойчива по Важевскому, то вещественный радиус устойчивости по Важевскому γ_B можно определить по формуле $\gamma_B = \min\limits_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i|$, где λ_i, $i = \overline{1,n}$, — собственные числа симметрической матрицы $H = (P + P^T)/2$*