СИСТЕМА MATHCAD ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧИ ЭКРАНИРОВАНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МНОГОСЛОЙНЫМ ДИСКОМ

Г. Ч. Шушкевич, В. Т. Ерофеенко

Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь
НИИ прикладных проблем математики и информатики
Минск, Беларусь
bsu_erofeenko@tut.by, g_shu@rambler.ru

Решена граничная задача с неклассическими граничными условиями, описывающими процесс проникновения низкочастотного электрического поля через многослойный диск. Решение задачи сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Численно исследовано влияние некоторых параметров задачи на коэффициент экранирования.

Ключевые слова: низкочастотное электрическое поле, интегральное уравнение, коэффициент экранирования, уравнение Лапласа, экран.

Обработка информации в средствах вычислительной техники (СВТ) основывается на использовании электромагнитных процессов в электронных элементах технических устройств. Электрические токи и заряды в проводниках и электродах используются для передачи и преобразования информации внутри технического устройства. С другой стороны, токи возбуждают побочные электромагнитные излучения (ПЭМИ), которые распространяются в окружающее пространство на достаточно большие расстояния. Распространяющиеся электромагнитные поля являются носителями информации, обрабатываемой в СВТ, и одновременно являются каналами утечки информации [1]. При наличии измерительной техники напряженность электрического поля может быть измерена и использована для доступа к конфиденциальной информации.

Для защиты от утечки информации по электромагнитным каналам используются экраны, которые снижают уровень излучения. В работе [2] решена задача экранирования низкочастотного электрического поля однослойной незамкнутой сферической оболочкой.

В данной работе рассматривается задача экранирования электрического поля многослойным диском, выполненным из магнитодиэлектрического материала. В качестве источника поля рассматривается электрод, излучающий в окружающее пространство низкочастотное электрическое поле. Такие поля излучаются аудиотехническими устройствами, которые обрабатывают звуковую информацию.

В однородном изотропном пространстве R^3 с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_0, μ_0 расположен плоский экран в виде кругового диска D радиуса a и толщины Δ:

$$D = \{-\Delta/2 < z < \Delta/2,\ 0 \le \rho \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}.$$

Диск D состоит из плоскопараллельных слоев

$$S_s = \{\, z_s < z < z_{s+1},\ 0 \le \rho \le a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \quad s = 1,\dots,n,$$

где $z_1 = -\Delta/2$, $z_{n+1} = \Delta/2$, $\Delta_s = z_{s+1} - z_s$ – толщина s-го слоя, $\Delta = \sum_{s=1}^{n} \Delta_s$.

Слой S_s выполнен из материала с комплекснозначными электромагнитными параметрами ε_s, μ_s.

Электромагнитное поле $\vec{E}^{(s)}, \vec{H}^{(s)}$ в слое S_s описывается уравнениями Максвелла $\operatorname{rot}\vec{E}^{(s)} = i\omega\mu_s\vec{H}^{(s)}$, $\operatorname{rot}\vec{H}^{(s)} = -i\omega\varepsilon_s\vec{E}^{(s)}$, ω – круговая частота поля.

В точке O – центр диска D, введем цилиндрические координаты $\{\rho,\varphi,z\}$, разобьем пространство R^3 плоскостью $\Gamma(z=0)$, $\Gamma = \Gamma_a \cup \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{z=0,\ \rho \ge a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, $\Gamma_a = \{z=0,\ 0 \le \rho < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ на полупространства $D_1(z<0)$, $D_2(z>0)$. Диск D ограничен плоскими круговыми поверхностями $\Gamma^{\pm} = \{z = \pm\Delta/2,\ 0 \le \rho < a,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$.

В полупространстве D_1 в точке $O_1(0,0,-h)$, $h > \Delta$, расположен источник низкочастотного электрического поля – диполь. Пусть u_0 – электрический потенциал диполя, $u_j = u_0 + u_j'$ – суммарный потенциал электрического поля в области D_j, $j = 1,2$, u_j' – потенциал вторичного электрического поля.

Сформулируем краевую задачу экранирования со специальными граничными условиями на поверхности диска D, моделирующими проникновение электрического поля через экран.

Требуется определить вторичные потенциалы $u_j' \in C^2(\bar{D}_j)$, $j = 1,2$, которые удовлетворяют уравнению Лапласа, граничным условиям

$$\left.(u_1 - u_2)\right|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}(u_1 - u_2)\right|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \rho > a, \tag{1}$$

$$\left.u_2\right|_{\Gamma^+} = \left.u_1\right|_{\Gamma^-} + V, \qquad 0 \le \rho < a, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}u_2\right|_{\Gamma^+} - \left.\frac{\partial}{\partial z}u_1\right|_{\Gamma^-} = Q_1 \left.\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_1\right|_{\Gamma^-} + Q_2 \left.\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_2\right|_{\Gamma^+}, \qquad 0 \le \rho < a, \tag{3}$$

где $\quad Q_j = Q_j(\Delta_1,\varepsilon_1,\mu_1;\ \Delta_2,\varepsilon_2,\mu_2;\dots;\ \Delta_n,\varepsilon_n,\mu_n;\omega)$, $\quad V$ – const,

и условию на бесконечности

$$u_j'(M) \to 0, \quad M \to \infty, \quad j = 1,2.$$

Учитывая представление $u_j = u_0 + u_j'$, вместо граничных условий (1)–(3) будем использовать граничные условия вида

$$\left.(u_1' - u_2')\right|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial}{\partial z}(u_1' - u_2')\right|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \rho > a, \tag{4}$$

$$\left.u_2'\right|_{\Gamma_a} + \left.u_0\right|_{\Gamma^+} = \left.u_1'\right|_{\Gamma_a} + \left.u_0\right|_{\Gamma^-} + V, \qquad 0 \le \rho < a, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u_2'\bigg|_{\Gamma_a}+\frac{\partial}{\partial z}u_0\bigg|_{\Gamma^+}-\frac{\partial}{\partial z}u_1'\bigg|_{\Gamma_a}-\frac{\partial}{\partial z}u_0\bigg|_{\Gamma^-}=Q_1\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_1\bigg|_{\Gamma^-}+Q_2\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}u_2\bigg|_{\Gamma^+},\quad 0\le\rho<\mathrm{a}. \qquad (6)$$

Реальные электрические потенциалы и электрические поля определяются формулами

$$V_j=\mathrm{Re}\left(u_j\,e^{-i\omega t}\right),\qquad \vec{E}_j=-\operatorname{grad}V_j,\qquad i-\text{ мнимая единица},\quad j=1,2.$$

Потенциалы u_j', $j=1,2$, представим в виде суперпозиции базисных решений уравнения Лапласа [4] так, чтобы выполнялось условие на бесконечности:

$$u_1'(\rho,z)=\int_0^\infty x(\lambda)\,J_0(\lambda\rho)\,e^{\lambda z}\,d\lambda,\qquad z<0, \qquad (7)$$

$$u_2'(\rho,z)=\int_0^\infty y(\lambda)\,J_0(\lambda\rho)\,e^{-\lambda z}\,d\lambda,\qquad z>0, \qquad (8)$$

где неизвестные функции $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ подлежат определению из граничных условий, $J_0(x)$ – функция Бесселя [3].

Потенциал электрического поля диполя, момент $\vec{p}=p\,\vec{e}_z$ которого направлен вдоль оси Oz, равен

$$u_0=\bar{p}\,\frac{z+h}{(\rho^2+(z+h)^2)^{3/2}}=\bar{p}\,\frac{1}{r_1^2}P_1(\cos\theta_1),\qquad \bar{p}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0},$$

где $P_n(x)$ − полиномы Лежандра [3].

Используя теорему сложения [4], можно представить потенциал u_0 через базисные цилиндрические функции:

$$u_0=\int_0^\infty A_0(\lambda)\,J_0(\lambda\rho)\,e^{-\lambda z}\,d\lambda,\qquad A_0(\lambda)=\frac{\lambda\,p}{4\pi\varepsilon_0}e^{-\lambda h},\qquad \mathrm{z}>-\mathrm{h}. \qquad (9)$$

Выполняя граничные условия (4)–(6) и принимая во внимание представления (7)–(9), получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$z(\lambda)\;+\;\int_0^\infty K(\lambda,\eta)\,z(\eta)\,d\eta=G(\lambda),\quad 0\le\lambda<\infty,$$

где

$$K(\lambda,\eta)=Q\lambda\eta e^{-(\lambda+\eta)\,\Delta/4}L(\lambda,\eta),\qquad L(\lambda,\eta)=\frac{a}{\eta^2\text{-}\lambda^2}\left[\eta J_1(\eta\mathrm{a})J_0(\lambda\mathrm{a})-\lambda J_1(\lambda\mathrm{a})J_0(\eta\mathrm{a})\right],$$

$$G(\lambda)=A_0(\lambda)e^{\lambda\Delta/4}\left(\lambda C\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right)-sh\left(\frac{\lambda\Delta}{2}\right)\right)+0{,}25(Q_2-Q_1)\lambda e^{-\lambda\Delta/4}q(\lambda),\qquad A_0(\lambda)=\frac{\lambda\,p}{4\pi\varepsilon_0}e^{-\lambda h},$$

$$Q=0{,}5(Q_1+Q_2),\qquad q(\lambda)=\mathrm{a}VJ_1(\lambda\mathrm{a})-\lambda q_0(\lambda),\qquad q_0(\lambda)=\bar{p}\int_0^{\mathrm{a}}H(\rho)J_0(\lambda\rho)\,\rho\,\mathrm{d}\rho,\qquad \bar{p}=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0},$$

$$H(\rho)=\frac{h+\Delta/2}{\left(\rho^2+(h+\Delta/2)^2\right)^{3/2}}-\frac{h-\Delta/2}{\left(\rho^2+(h-\Delta/2)^2\right)^{3/2}},\qquad C(x)=0{,}5\left(Q_1e^{x}+Q_2e^{-x}\right),$$

$$z(\lambda) = Q\lambda e^{-\lambda\Delta/4} y(\lambda) - \Psi(\lambda), \qquad \Psi(\eta) = Q_1 \frac{q(\eta)}{2} \eta e^{-\eta\Delta/4} + A_0(\eta) e^{\eta\Delta/4} \left(sh\left(\frac{\eta\Delta}{2}\right) - \eta C\left(\frac{\eta\Delta}{2}\right) \right).$$

Коэффициент экранирования первичного электрического поля многослойным диском будем вычислять по формуле

$$K(\rho, z) = \left|\vec{E}_2(\rho, z)\right| / \left|\vec{E}_0(\rho, z)\right|,$$

где

$$\vec{E}_2(\rho, z) = -\operatorname{grad} u_2(\rho, z) =$$

$$= \int_0^\infty \lambda \left(y(\lambda) + A_0(\lambda) \right) J_1(\lambda\rho) e^{-\lambda z} \, \mathrm{d}\lambda \, \vec{e}_\rho + \int_0^\infty \lambda (y(\lambda) + A_0(\lambda)) J_0(\lambda\rho) e^{-1z} \, d\lambda \, \vec{e}_z ,$$

$$\vec{E}_0(\rho, z) = -\operatorname{grad} u_0(\rho, z) = \int_0^\infty \lambda A_0(\lambda) J_1(\lambda\rho) e^{-\lambda z} \, d\lambda \, \vec{e}_\rho + \int_0^\infty \lambda A_0(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} \, d\lambda \, \vec{e}_z .$$

Разработано программное обеспечение в системе компьютерной математики Mathcad [5] для численного исследования экранирующих свойств многослойного диска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бузов, Г. А.* Защита от утечки информации по техническим каналам / Г. А. Бузов, С. В. Калинин, А. В. Кондратьев. М.: Горячая линия – Телеком, 2005. 416 с.

2. *Ерофеенко, В. Т.* Экранирование технических устройств в комплексной защите информации / В. Т. Ерофеенко, Г. Ч. Шушкевич //Комплексная защита информации. XVI Междунар. науч.-практ. конф., 17–20 мая 2011 г., Гродно. Минск, 2011. С. 88–92.

3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

4. *Ерофеенко, В. Т.* Теоремы сложения / В. Т. Ерофеенко. Минск: Наука и техника, 1989. 240 с.

5. *Шушкевич, Г. Ч.* Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14. Ч. 1 / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. Минск: Изд-во Гревцова, 2010. 287 с.