ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

А.А. Денисковец

Гродненский государственный аграрный университет

Терешковой 28, 230008 Гродно, Беларусь

aleksei_deniskov@mail.ru

Алгебраическое дифференциальное уравнение Риккати — Абеля

$$A(z)w^{(l)} = \sum_{i=0}^{N} B_i(z)w^{\nu_i}, \tag{1}$$

где $A(z)$, $B_i(z)$ $(i = \overline{0,N})$ полиномы комплексного переменного z степени $\deg A(z) = a$, $\deg B_i(z) = b_i$, $\nu_N \geqslant 2$, исследуется на предмет наличия полиномиальных решений и их асимптотических свойств. Эти вопросы решаются в зависимости от параметров, входящих в задание самого уравнения. В частности построено множество степеней возможных полиномов-решений, установлено их количество и максимально возможное число. Предлагается решение задачи по установлению количества линейно независимых полиномиальных решений и задачи распределения нулей. Полученные результаты являются продолжением исследований, приведенных автором в [1]. Сформулируем некоторые из них.

Теорема 1. *Если в уравнении* (1) *показатели степени* $\nu_0 = 0$, $a < \nu_0 l$, *то степень* m *его полиномиальных решений удовлетворяет неравенству* $m \leqslant \min\{l-1,\ [b_0/(\nu_1-\nu_0)],\ \max\limits_{i=\overline{0,N-1}}\{(a-b_N-l)/(\nu_N-1),\ (b_i-b_N)/(\nu_N-\nu_i)\}\}$, *а при* $b_0 > a-l$, $b_0 > b_i$, $i=\overline{1,N}$, *и неравенству* $m \geqslant \max_{i=\overline{1,N}}\{b_0-a+l,\ (b_0-b_i)/(\nu_1-\nu_0)\}$.

Теорема 2. *Любые два полиномиальные решения уравнения* (1) *при* $a < l$ *отличаются на полином степени не выше, чем* $\min\{l-1,\ \theta\}$, *где* θ *— наибольшая степень возможного полинома-решения.*

Теорема 3. *Уравнение* (1) *может иметь не более* $\theta+1$ *линейно независимых полиномиальных решений, причем, если в уравнении* (1) *показатель степени* $a < (\nu_0 + \delta^0_{\nu_0})$, *то независимых решений не более* $\min\{\theta+1,\ \mu+1,\ [b_0/(\nu_1-\nu_0]+1,\ \nu_N-\nu_0,\ l+\delta^{\theta-l}_{|\theta-l|}\}$, *где* δ^i_j *— символ Кронекера.*

Теорема 4. *Нули любого полиномиального решения степени не выше чем* $l-1$ *уравнения* (1) *содержатся во множестве нулей полинома* $B_0(z)$.

Теорема 5. *Нули кратности больше* $l-1$ *любого полиномиального решения уравнения* (1) *при* $\nu_0 \geqslant 1$ *содержатся во множестве нулей полинома* $A(z)$.

Теорема 6. *Общими нулями хотя бы двух полиномов-решений уравнения* (1) *при* $\nu_0 = 0$ *кратности выше чем* $l - 1$ *могут быть лишь общие нули полиномов* $A(z)$ *и* $B_0(z)$.

Теорема 7. *Любые два полиномиальные решения уравнения* (1) *при* $l = 1$ *отличаются либо на постоянную, либо на полином, нули которого содержатся во множестве нулей полинома* $A(z)$.

Литература

1. *Денисковец А.А.* Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнений высшего порядка // Материалы научной конференции "Герценовские чтения — 2005". — СПб.: РГПУ им. А.И.Герцена, 2005. — С. 31–38.