О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ Р-ТИПА

В.И. Громак

Белгосуниверситет, механико-математический факультет

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

vgromak@gmail.com

В настоящее время известны различные подходы к построению обыкновенных дифференциальные уравнений и уравнений с частными производными со свойством Пенлеве, т. е. уравнений Р-типа. Уравнения Пенлеве и обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) высших порядков Р-типа естественно возникают из симметрийных редукций интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными, что явилось одной из причин возобновления интереса к уравнениям Р-типа. В частности, хорошо известны иерархии первого и второго уравнений Пенлеве, полученные как автомодельные редукции из иерархии модифицированного уравнения Кортевега - де Фриза. Свойства решений уравнений этих иерархий, с точностью до порядка уравнения, подобны свойствам решений уравнений Пенлеве, которые являются первыми членами этих иерархий [1]. Также исследованы автомодельные редукции из уравнений Кодри — Додда — Гибона и Каупа — Купершмидта, приводящие к двум иерархиям ОДУ K_1 и K_2, определяемых соответственно уравнениями

$$h_n(w) = z, \quad (\frac{d}{dz} + w)h_n(w_z - \frac{1}{2}w^2) - zw + \beta = 0,$$

где оператор h_n определяется рекуррентно

$$h_0(u) = 1, \ h_1(u) = u_{zz} + 4u^2, \ \Theta_2 = D^3 + 2uD + u_z,$$

$$J_2 = D^3 + 3(uD + Du) + 2(D^2uD^{-1} + D^{-1}uD^2) + 8(u^2D^{-1} + D^{-1}u^2)$$

$$h_{n+2}(u) = J_2\Theta_2 h_n(u), \quad D = d/dz, \quad u = u(z), \quad D^{-1}(\cdot) = \int(\cdot)dz.$$

Первые два члена иерархии K_1 соответственно имеют вид

$$w'' + 4w^2 = z, \quad w^{(4)} + 12ww'' + \frac{32}{3}w^3 + 6(w')^2 = z.$$

Иерархия K_1 является обобщением первого уравнения Пенлеве, которое является первым членом этой иерархии. Второе уравнение Пенлеве $w'' = w^3/2 + zw - \beta$ получается из уравнения иерархии K_2 при $h_n(u) = u$. Первые два члена иерархии K_2 имеют вид

$$w^{(4)} = -5w'w'' + 5w^2w'' + 5w(w')^2 + zw - w^5 - \beta,$$

$$w^{(6)} = 7w^2(2w'w'' + w^{(4)}) - 7w'w^{(4)} + w(\frac{28}{3}(w')^3 + 21(w'')^2 + 28w'w''')-$$

$$-14w''w^{(3)} + 28(w')^2w'' - 14w^4w'' - 28w^3(w')^2 + \frac{4}{3}w^7 + zw - \beta.$$

Свойства решений уравнений иерархий K_1 и K_2 изучались с различных точек зрения. В частности, для уравнений иерархии K_2 построено преобразование Беклунда [2]. В настоящей работе продолжая исследования уравнений иерархий K_1 и K_2 [3] найдены условия существования и построены семейства полярных решений, установлена гамильтонова структура и построены полиномиальные гамильтонианы первых уравнений иерархий K_1 и K_2, построены специальные классы решений, включая рациональные решения, определены условия их существования.

Литература

1. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. V. 28. Berlin; New-York, 2002.

2. *Kudryashov N.A.* Special polynomials associated with some hierarchies // Physics Letters A 372 (2008) 1945-1956.

3. *Громак В.И.* О свойствах решений уравнений иерархии K_2 // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. С. 1017–1026.