БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Руденок А. Е. Условия изохронности центра и фокуса в полярных координатах // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1360–1372.
2. Амелькин В. В., Калитин Б. С. Нелинейные изохронные и импульсные колебания в системах второго порядка. Минск, 2008.
3. Руденок А. Е. Сильная изохронность центра и фокуса систем с однородными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 2. С. 154–161.

Поступила в редакцию 15.05.13.

Александр Евгеньевич Руденок – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа.

УДК 519.24

А. И. НОВИК

ДВА ПОДХОДА К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ КОПУЛ

В последнее время особое внимание уделяется моделям копул, позволяющим из многомерного распределения получить маргинальные распределения и оценить их параметры. Целью работы является проведение сравнительного анализа метода максимального правдоподобия с полупараметрическим методом статистического оценивания параметров копул. Приводится определение копулы и рассматриваются ее свойства. Описаны исследуемые методы оценивания параметров копул. Для двух сгенерированных по нормальному закону распределения последовательностей случайных величин построены с заданным значением параметра функции копулы: Стьюдента, гауссовская, Клейтона, Гумбеля, Франка. Методом максимального правдоподобия и полупараметрическим методом оценены параметры исследуемых функций копулы. Сравниваются заданные и оцененные значения параметров построенных копул. В результате показано, что параметрический метод максимального правдоподобия позволяет получать более точные оценки для исследуемых данных. Для практической реализации разработан командный код в пакете R.

Ключевые слова: копула; параметрический метод; метод максимального правдоподобия; полупараметрический метод.

Recently special attention is given to copulas models, which allows to obtain the distribution of multi-dimensional marginal distributions and estimate their parameters. The aim is to conduct a comparative analysis of the maximum likelihood method with a semi-parametric method of statistical estimation of the parameters of copulas. Is the definition of copulas and discusses its properties. Describes the methods of estimating the parameters studied copulas. For two generated by normal distribution of sequences of random variables are constructed with a given copula function parameter: Student, Gaussian, Clayton, Gumbel, Frank. By maximum likelihood and semi-parametric method evaluated parameters of the functions copula. Compares the specified and estimated values parameters constructed copulas. The result shows that the parametric maximum likelihood method allows to obtain more accurate estimates for the experimental data. For practical implementation of the code developed by the team in the package R.

Key words: copula; parametric method; maximum likelihood method; semi-parametric method.

Цель работы – проведение сравнительного анализа двух подходов для оценивания параметров копул. Приводится определение копулы и рассматриваются ее свойства. Описан иллюстративный пример моделирования двумерного распределения и с помощью пакета R оцениваются параметры копул.

Период кризиса в банковской сфере еще раз подчеркнул цену ошибки, которую пришлось заплатить риск-менеджерам за принятие предпосылки о нормальном характере распределения рисков. Поэтому в последнее время активно исследуются способы моделирования совместного многомерного распределения, соответствующего наблюдаемым данным, и проводятся исследования их асимметричности и наличия «тяжелых хвостов». Особое внимание уделяется моделям копул, позволяющим из многомерного распределения получить маргинальные распределения и исследовать их зависимость.

Определение. Функция $C(x,y)$ называется копулой двух переменных x и y, определенных на множестве $[0, 1]^2$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $C(x, 0) = 0$, $C(0, y) = 0$;
2. $C(1, y) = y$, $C(x, 1) = x$;
3. $C(x_2, y_2) + C(x_1, y_1) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) \geq 0$, где $(x_1, y_1) \in [0,1]^2$, $(x_2, y_2) \in [0,1]^2$ и $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$.

Свойства копулы

1. $0 \leq C(x, y) \leq 1$.
2. Любая копула находится в пределах

$$\max(x + y - 1, 0) \leq C(x, y) \leq \min(x, y),$$

которые называются границами Фреше – Хефдинга.

3. Копула C_2 доминирует над копулой C_1, если для любых x, y $C_1(x, y) \leq C_2(x, y)$.

Для любых $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$, $(y_1, y_2) \in [0,1]^2$ справедливо неравенство

$$|C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Использование копул для моделирования совместных вероятностных распределений основано на теореме Скляра, доказанной в 1959 году.

Теорема Скляра [2, с. 18]. *Пусть* $X, Y \in R$ *– случайные величины, маргинальные функции распределения которых* $F_X(x) = P(X \le x)$, $F_Y(y) = P(Y \le y)$, $x, y \in R$, *а двумерная функция распределения случайного вектора (X, Y):* $F_{XY}(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$, $x, y \in R$. *Тогда существует копула C(x, y) такая, что*

$$F_{XY}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)), \ x, y \in R. \quad (1)$$

Если функции $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ непрерывны, то копула $C(x, y)$ в (1) определяется единственным образом. Верно и обратное утверждение: если $C(x, y)$ – копула, а $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ – маргинальные функции распределения, то функция $F_{XY}(x, y)$, определенная выше, является двумерной функцией распределения случайного вектора (X, Y).

Заметим, что из (1) следует равенство $C(x, y) = F_{XY}(F_X^{-1}(x), F_Y^{-1}(y))$.

Таким образом, копула – это функция, позволяющая перейти от одномерных распределений двух случайных величин к их совместному распределению.

Все копулы можно отнести к трем семействам: эллипсообразные (например, гауссовская, Стьюдента) [1, с. 112], архимедовы (например, Франка, Клейтона, Гумбеля, Али – Микаэля – Хака), экстремальные (например, Галамбоса, Хаслера – Райса) [2, с. 116].

В данной работе используются следующие функции копул.

1) Гауссовская копула:

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{F_Y^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(\frac{2\theta z_1 z_2 - z_1^2 z_2^2}{2(1-\theta^2)}\right) dz_1 dz_2, \quad (2)$$

где $\theta \in [-1, 1]$ – параметр копулы.

2) Копула Стьюдента:

$$C(x, y) = \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{F_Y^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(1 + \frac{z_1^2 + z_2^2 - 2\theta z_1 z_2}{\nu(1-\theta^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dz_1 dz_2, \quad (3)$$

где $\theta \in [-1, 1]$ – параметр копулы, ν – число степеней свободы копулы.

3) Копула Клейтона:

$$C(x, y) = \left[\max\left(F_X(x)^{-\theta} + F_Y(y)^{-\theta} - 1, 0\right)\right]^{-1/\theta}, \quad (4)$$

где $\theta \in [-1, 0) \cup (0, +\infty)$ – параметр копулы.

4) Копула Франка:

$$C(x, y) = -\frac{1}{\theta} \ln\left[1 + \frac{(e^{-\theta F_X(x)} - 1)(e^{-\theta F_Y(y)} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right], \quad (5)$$

где $\theta \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ – параметр копулы.

5) Копула Гумбеля:

$$C(x, y) = \exp\left\{-\left(\left(-\ln F_X(x)\right)^{\theta} + \left(-\ln F_Y(y)\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}\right\}, \quad (6)$$

где $\theta \in [-1, +\infty)$ – параметр копулы.

Методы оценки параметра копулы

Все методы оценки параметра копулы делятся на параметрические, полупараметрические и непараметрические.

Пусть случайные величины X и Y имеют совместную функцию распределения $F_{XY}(x, y)$, маргинальные функции распределения $F_X(x)$, $F_Y(y)$ и маргинальные плотности распределения $f_X(x)$, $f_Y(y)$. Тогда совместную плотность распределения $f_{XY}(x, y)$ случайных величин X, Y можно представить в виде

$$f_{XY}(x, y) = c(F_x(x), F_y(y)) f_X(x) f_Y(y),$$

где плотность копулы $c(F_X(x), F_Y(y))$ определяется по формуле

$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x) \partial F_Y(y)}.$$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_T\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_T\}$ – выборки объемом T наблюдений над случайными величинами X, Y соответственно.

Параметрический метод. Основным методом оценки параметра копул является метод максимального правдоподобия. Предположим, что копула $C(x, y)$ принадлежит параметрическому семейству с параметром θ. Логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \ln c(F_X(x_t), F_Y(y_t)) + \sum_{t=1}^{T} \ln(f_X(x_t) f_Y(y_t)).$$

Согласно методу максимального правдоподобия в качестве оценки неизвестного параметра θ принимается такое значение $\hat{\theta}$, которое максимизирует функцию $l(\theta)$. То есть оценка $\hat{\theta}$ является точкой максимума логарифмической функции правдоподобия:

$$\hat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta).$$

Оценка, построенная по методу максимального правдоподобия, является состоятельной, асимптотически эффективной и асимптотически нормальной, т. е.

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \to N(0, \Im^{-1}(\theta_0)),$$

где θ_0 – точное значение параметра, $\Im(\theta_0)$ – информационная матрица Фишера.

$$\Im(\theta_0)_{x,y} = \mathrm{E}[\partial_x L(\theta_0) \partial_y L(\theta_0)].$$

Полупараметрический метод. Полупараметрический метод предполагает двухэтапную оценку параметра копулы. На первом этапе используется эмпирическое распределение $\widehat{F}_X(x)$ и $\widehat{F}_Y(y)$. На втором происходит параметрическая оценка параметра копулы.

$$\hat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^{T} \ln c(\widehat{F}_X(x_t), \widehat{F}_Y(y_t); \theta).$$

Оценка, построенная полупараметрическим методом, является состоятельной и асимптотически нормальной.

Пример. Исследуются следующие виды копул [3] для двух сгенерированных по нормальному закону распределения последовательностей из 200 значений:

- гауссовская копула вида (2) со значением параметра θ = 0,4 (рис. 1),
- копула Стьюдента (3), если параметр θ = 0,7 и ν = 8 (рис. 2),
- копула Клейтона вида (4) со значением параметра θ = 2 (рис. 3),
- копула Франка (5) при значении параметра θ = 5,7 (рис. 4),
- копула Гумбеля по формуле (6) со значением параметра θ = 2 (рис. 5).

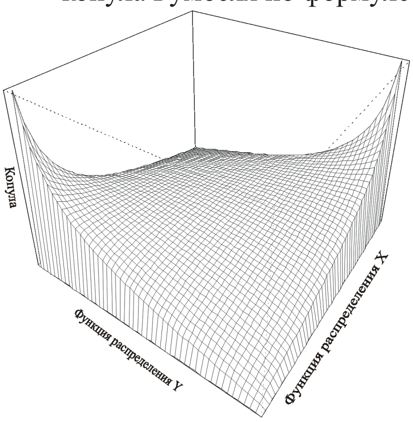

Рис. 1. Плотность распределения гауссовской копулы, если параметр θ = 0,4

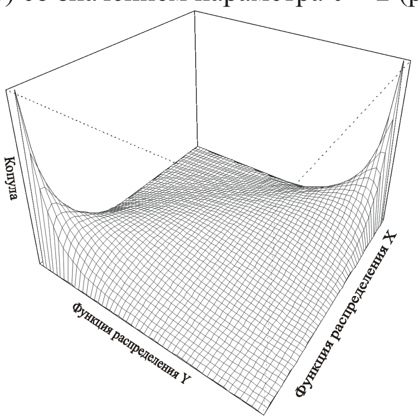

Рис. 2. Плотность распределения копулы Стьюдента с параметром θ = 0,7 с 8 степенями свободы

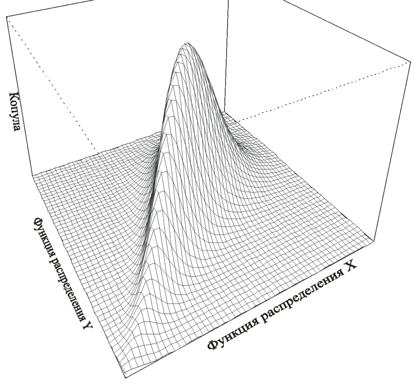

Рис. 3. Плотность распределения копулы Клейтона с параметром θ = 2

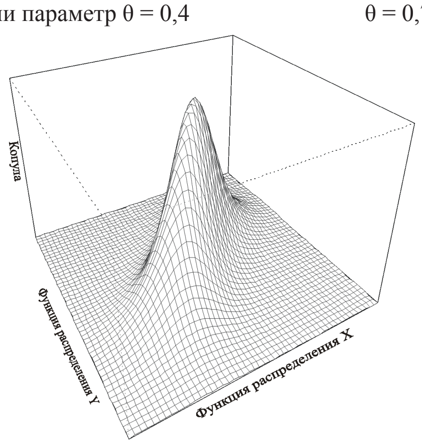

Рис. 4. Плотность распределения копулы Франка со значением параметра θ = 5,7

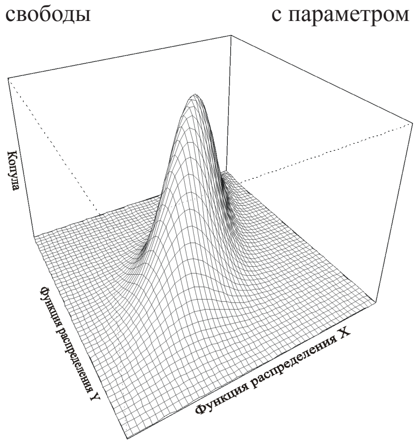

Рис. 5. Плотность распределения копулы Гумбеля с параметром θ = 2

С помощью статистического пакета R сгенерированы значения копулы и графически построены функции плотности копул и их контурные диаграммы.

Получены оценки параметра построенных моделей копул параметрическим и полупараметрическим методами максимального правдоподобия.

Для автоматизации необходимых вычислений написан командный код в статистическом пакете R.

Результаты исследования оформлены в следующую таблицу.

Оценка моделей копул

Параметр	Гауссовская копула	Копула Стьюдента	Копула Клейтона	Копула Франка	Копула Гумбеля
Метод максимального правдоподобия					
θ_0	0,4	0,7	2	5,7	2
Оценка $\hat{\theta}$	0,4026702	0,7786071	2,070533	5,749352	2,138145
Стандартная ошибка	0,0379976	0,0167473	0,200352	0,540113	0,122014
Уровень значимости	10,59725	46,491462	10,33445	10,64472	17,52365
Значение функции максимального правдоподобия	44,79839	215,7464	88,38214	63,94606	86,89586
Полупараметрический метод максимального правдоподобия					
θ_0	0,4	0,7	2	5,7	2
Оценка $\hat{\theta}$	0,4057447	0,7890445	2,211688	4,402637	5,918177
Стандартная ошибка	0,0573206	0,4761710	0,318896	0,582956	0,682372
Уровень значимости	7,07851	8,6357084	6,935431	7,55226	8,672943
Значение функции максимального правдоподобия	41,33643	207,0648	93,67451	43,09127	66,43564

В результате исследования показано, что параметр копулы, оцененный параметрическим методом максимального правдоподобия, позволяет получать более точные оценки исследуемых данных, потому что значения стандартной ошибки для всех копул меньше по сравнению с полупараметрическим методом, а значения функции максимального правдоподобия – больше. Поэтому уровни значимости оценки параметра полупараметрическим методом для всех копул оказались ниже, чем при использовании параметрического метода максимального правдоподобия.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons Ltd, 2004. P. 49–80.
2. Nelsen R. An Introduction to Copulas. Second Edition. Springer. New York, 2006. P. 7–48.
3. Новик А. И., Труш Н. Н. Конструирование моделей копул // Моделирование процессов и систем: труды Междунар. конф. Минск, 2–4 мая 2012 г. Минск, 2012. С. 148–151.

Поступила в редакцию 09.11.12.

Анна Ивановна Новик – аспирант кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории вероятностей и математической статистики Н. Н. Труш.

УДК 539.3

В. В. КОРОЛЕВИЧ (ЧЕХИЯ), Д. Г. МЕДВЕДЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 2-го РОДА В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, СКРЕПЛЕННЫХ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ ПАСТЕРНАКА

С помощью линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода решается задача осесимметричного изгиба полярно-ортотропных кольцевых пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака и нагруженных распределенной поперечной нагрузкой, изменяющейся вдоль радиуса. Методом последовательных приближений получены решения этих уравнений в общем случае. Приводятся расчетные формулы для изгибающих моментов, поперечного усилия и функции прогиба в анизотропной кольцевой пластине. Нормальные и касательные напряжения в пластине вычисляются по известным формулам.

Ключевые слова: анизотропия; дифференциальное и интегральное уравнения; итерация; композитный материал; меридиональное сечение; ортогональная плоскость; полярно-ортотропная пластина; факториальная сходимость.

With the help of linear Volterra integral equations of the 2-nd kind the problem of axisymmetric bending of polar-orthotropic annular plates of variable thickness, fastened with elastic Pasternak base and loaded by a distributed transverse load, varying along the radius, is solved. The solutions of this equations in general are obtained by the method of successive approximations. The calculated