ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЦЕНТРА

В.А. Германович

Мозырский госпедуниверситет, физико-математический факультет,

Студенческая 28, 247760 Мозырь, Беларусь

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\alpha y + P(x, y), \dot{y} = \alpha x + Q(x, y). \tag{1}$$

Теорема. *Пусть имеем уравнение*

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \rho^2 \frac{B_0 + B_1\rho + B_2\rho^2 + B_3\rho^3 + B_4\rho^4 + B_5\rho^5}{A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3 + A_4\rho^4 + A_5\rho^5 + A_6\rho^6}, \tag{2}$$

где A_0 *четная функция,* $A_3 = 0$ *. И пусть функции* $b = -A_4/A_2$ *и* $a = (-4A_0A_1B_0 + 2A_1^2B_0 + 4A_0A_2B_0 + 4A_0^2B_1 - 2A_0A_1B_1 - 4A_0^2B_2 + 7A_1^2\overline{B_0} - 4A_0A_2\overline{B_0} - 11\overline{A_1}^2\overline{B_0} + 8A_0A_2B_0 + 4\overline{A_0}^2b(\phi)(B_0 + \overline{B_0}) + 4A_0^2\overline{B_1} - 4A_0A_1\overline{B_1} - 4A_0^2\overline{B_2} + (6A_0^2 - 4A_0^3)b'(\phi) + 2A_1(A_1B_0 - A_0B_1 + 2(A_0 - A_1)\overline{B_0} - 2A_0\overline{B_1} + A_0^2b'(\phi)))/(8A_0(A_1B_0 - A_0B_1 + \overline{A_1B_0} - A_0\overline{B_1} + A_0^2b'(\phi)))$ *доопределяются до дифференцируемых на всем* R *функций.* $A_i, B_j, (i = \overline{0,6}, j = \overline{0,5})$ *функции от* ϕ*. Тогда, если для этого уравнения выполнены условия:* $A_6 = -b^3A_0$, $B_5 = b^2b'A_0$, $A_5 = -b^2A_1$, *и функции* $a_1 = A_1 + 2aA_0$, $a_0 = A_2 - A_1a + A_0b + A_0a^2$ *четные, а функции* $\alpha_0 = B_2 - A_2a' + a^2(B_0 - A_0a') - b(2B_0 + A_0a') - A_1b' + a(A_1a' + A_0b' - B_1)$, $\alpha_1 = B_1 - 2B_0a + 3A_0a'a - A_1a' - A_0b'$, $\alpha_2 = B_0 - A_0a'$ *- нечетные, то система дифференциальных уравнений (1), которая в полярных координатах сводится к уравнению (2) имеет центр в начале координат.*

Доказательство. Для функции $U = \dfrac{1}{\rho} + a + b\rho$ найдем полную производную

$$\frac{dU}{d\phi} = \rho^2\frac{B_0 + B_1\rho + B_2\rho^2 + B_3\rho^3 + B_4\rho^4 + B_5\rho^5}{A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3 + A_4\rho^4 + A_5\rho^5 + A_6\rho^6} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1U + \alpha_2U^2}{a_0 + a_1U + a_2U^2}.$$

Из этого соотношения, согласно [1, с.65] следует, что $U(\phi, \rho(\phi))$ четная функция для любого решения $\rho(\phi)$ уравнения (2). Поэтому отражающая функция уравнения (2) удовлетворяет соотношению $U(-\phi, F) \equiv U(\phi, \rho(\phi))$. Из выше сказанного, в силу 2π -периодичности коэффициентов уравнения (2), следует 2π-периодичность отражающей функции F. Тогда, согласно [2], система дифференциальных уравнений (1), которая в полярных координатах записывается уравнением (2) будет иметь центр в начале координат. Теорема доказана.

Литература

1. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем: Монография./ В.И. Мироненко; Мин. образов. РБ, УО "ГГУ им. Ф.Скорины". Гомель, 2004. 196с.

2. *Германович В.А.* Сравнение метода Ляпунова и метода отражающей функции для решения проблемы “центра-фокуса” // XII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения — 2007): тез. докладов Международной научной конференции. Минск, 16-19 мая 2007 г. Мн.. Институт математики НАН Беларуси, 2007. С. 13-14.