О применении расслоений для построения фуксовых уравнений

И.В. Вьюгин

МГУ им. М.В. Ломоносова, Воробьевы горы 1, 119991 Москва, Россия
vyugin@gmail.com

Рассматривается задача восстановления скалярного фуксова (регулярного) уравнения

$$\frac{d^p y}{dz^p} + b_1(z)\frac{d^{p-1}y}{dz^{p-1}} + \ldots + b_p(z)y = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

по его представлению монодромии

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, z_0) \longrightarrow GL(p, \mathbb{C}) \tag{2}$$

и набору особых точек $D = \{a_1 = 0, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n = \infty\}$ (задача I ниже или 21-я проблема Гильберта для скалярных фуксовых уравнений). Напомним, что *фуксовым* называется уравнение, все особые точки которого *фуксовы*, т.е. для любых i, j: $b_j(z) = (z - a_i)^j r_j(z)$, где $r_j(z)$ — голоморфная в точке a_i функция.

Известно, что эта задача имеет положительное решение лишь для исключительных данных монодромии, хотя контрпримеров к этой задаче известно не много. Мы представим еще две задачи (II и III), которые формулируются в других терминах и эквивалентны первой.

Задача I. Построить по представлению χ и набору точек D фуксово уравнение, имеющее представление монодромии χ и набор особых точек D.

Задача II. Построить по представлению χ и набору точек D фуксову систему

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \qquad B(z) = \frac{\begin{pmatrix} * & 1 \\ * & * \end{pmatrix}}{z} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}}{z - a_i} \tag{3}$$

с матрицей коэффициентов почти треугольного вида, имеющей заданную монодромию χ и набор особенностей D.

Напомним, что система называется *фуксовой* если ее особые точки суть полюса первого порядка. В данном случае это означает, что звездочками обозначены произвольные константы.

Задача III. Построить голоморфное векторное расслоение на сфере Римана с логарифмической (фуксовой) связностью, имеющей монодромию χ и набор особых точек D, которые образуют стабильную пару и с типом расщепления K таким, что $k_i - k_{i+1} = n - 2$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Определение стабильного расслоения со связностью и ее приложение к данной теории можно найти в [3].

Теорема 1. *Задачи I, II и III эквивалентны.*

Данная теорема обобщает ряд результов в этом направлении полученных ранее А.А. Болибрухом, М. Зингером, М. Ван-дер-Пут в работах [1, 2].

Следующая теорема дает формулу для числа непрерывных параметров от которых зависит множество Ω_K фуксовых связностей в расслоении с заданным типом расщепления $K = (d_1 I_{l_1}, \ldots, d_m I_{l_m})$, где I_{l_i} — единичная матрица размерности l_i, $\sum l_i = p$.

Теорема 2. $\dim \Omega_K = (n-1)p^2 - \sum_{i \leqslant j} l_i l_j (w_{ij} + 1) + 1, \quad w_{ij} = \min(d_i - d_j, n-1)$.

Литература

1. *Болибрух А.А.* 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем. М.: Наука, 1994. (Тр МИАН; Т. 206).

2. *Van der Put M., Singer M.* Singer Galois theory of linear differential equations. Springer-Verlag, 2003.

3. *Болибрух А.А.* Проблема Римана — Гильберта на компактной римановой поверхности // Тр МИРАН. 2002. Т. 238 С. 55–69.