О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ РЕЗОНАНСАМИ

Т.Н. Ванькова, И.П. Мартынов, В.А. Пронько

Гродненский госуниверситет им. Я. Купалы, факультет математики и информатики

Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$y^{(2n+1)} = 2yy^{(2n)} + \sum_{m=1}^{n} a_m y^{(m)} y^{(2n-m)}, \tag{1}$$

где n — натуральное число, $a_m = (-1)^m C_{2n}^m \, C_{2n+2}^{m+1}/(n+1)$, $m = \overline{1, n-1}$, $a_n = (-1)^n (2n+1) \times (n+1)^{-2} (C_{2n}^n)^2$.

При $n = 1$ уравнение (1) является известным уравнением Шази, а при $n = 2$ масштабным преобразованием оно приводится к виду, содержащемуся в [1].

Представим решение уравнения (1) рядом Лорана

$$y = -(n+1)(2n+1)\left(\frac{1}{z-z_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(z-z_0)^{k+1}}\right). \tag{2}$$

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. *Все резонансы уравнения (1) отрицательны и равны* $r = -\nu$, $\nu = \overline{1, 2n+1}$.

Теорема 2. *Ряд (2) сходится в области* $|z - z_0| > \delta$, $\delta > 0$, *причем коэффициенты* $\alpha_k, k = \overline{1, 2n+1}$, *отвечающие резонансам, являются произвольными, а остальные коэффициенты находятся по рекуррентной формуле*

$$\left(C_{2n+k+1}^k - \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m C_{2n+2}^{m+1} C_{m+k}^m\right)\alpha_k = \sum_{l=1}^{k-1}\left(C_k^l C_{2n+k}^k \sum_{m=0}^{2n} \frac{\beta_m}{C_{2n+k}^{m+l}}\right)\alpha_l \alpha_{k-l},$$

где $\beta_m = \frac{(-1)^m}{2} C_{2n}^m C_{2n+2}^{m+1}$, $m = \overline{0, 2n}$, $k = 2n+2, 2n+3, \ldots$

Теорема 3. *Уравнение (1) имеет трехпараметрическое решение*

$$y = -\frac{(n+1)(2n+1)}{z-z_1} + \frac{h}{2(z-z_1)^2} - \frac{h}{(z-z_1)^2}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \gamma^k e^{-\frac{kh}{z-z_1}}, \tag{3}$$

где γ, h, z_1 *— произвольные постоянные,* μ_k *находятся по рекуррентной формуле . Ряд (3) абсолютно сходится в области, ограниченной подвижной особой линией (окружностью или прямой), все точки которой являются существенно особыми для членов ряда (3).*

В докладе приведены также другие классы нелинейных дифференциальных уравнений с отрицательными резонансами, общие решения которых или рациональны, или имеют подвижные критические особенности.

Например, если ввести в рассмотрение рекурретно заданные дифференциальные выражения

$$P_1(y) = y' + y^2, \; P_n(y) = \frac{n-1}{n}\left(\frac{d}{dx} P_{n-1}\left(\frac{n}{n-1} y\right) + ny P_{n-1}\left(\frac{n}{n-1} y\right)\right), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

то уравнение $P_n(y) = 0$ будет иметь рациональное общее решение $y = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (z - c_k)^{-1}$.

Это решение в проколотой окрестности бесконечности имеет разложение в ряд Лорана с резонансами $r = -1, -2, \ldots, -n$.

Литература

1. *Cosgrove C.M.* // Stud. Appl. Math. 2006. V. 116. P. 321 413.