ТИПЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ГОЛОМОРФНЫХ РАССЛОЕНИЙ

Ю.П. Бибило

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Ленинские горы 1,119992 Москва, Россия
yulia_bibilo@mail.ru

Пусть заданы точки на сфере Римана $a_1, a_2, .., a_n \in \bar{\mathbb{C}}$ и представление монодромии

$$\chi : \pi_1(\bar{\mathbb{C}} \backslash \{a_1, .., a_n\}, z_0) \to GL(p, \mathbb{C}). \tag{1}$$

В 21-й проблеме Гильберта требуется найти фуксову систему уравнений

$$\frac{dY}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i} Y \tag{2}$$

с монодромией (1). Для ее решения строится семейство $\mathbf{F} = \{(\mathcal{F}, \nabla)\}$ (построение Рерля) расслоений с логарифмическими связностями.

Расслоение $(\mathcal{F}, \nabla) \in \mathbf{F}$ можно описать следующим образом. В окрестности O_i каждой точки a_i локальная связность ω^i задает фуксову систему, фундаметальная матрица которой имеет вид $T_i(z) = U(z)(z - a_i)^{A^{\phi_i}}(z - a_i)^{E_i^0}$. тогда функции перехода в таком расслоении выражаются $g_{ij} = T_i T_j^{-1}$ [1]. Расслоение $(\mathcal{F}, \nabla)$ зависит от выбора матриц $S = \{S_i\}_{i=1}^n$, S_i приводит $E_i = \frac{1}{2\pi i} \ln G_i$ к верхнетреугольному виду (G_i, $i = 1..n$ – матрицы монодромии) и от наборов допустимых параметров $A^{\phi} = \{A^{\phi_i}\}_{i=1}^n$, которые используются при продолжении связности в особые точки a_i, $i = 1..n$.

Если среди построенных расслоений семейства $\mathbf{F}$ найдется тривиальное (голоморфно эквивалентное прямому произведению), то искомая система существует, иначе – проблема решается отрицательно. Согласно теореме Биркгофа – Гротендика всякое голоморфное расслоение $\mathcal{F}$ эквивалентно расслоению $(\mathbb{C}, \bar{\mathbb{C}} \backslash \{0\}, z^K)$, где $K = \operatorname{diag}(k_1, .., k_p)$ – диагональная матрица с целочисленными элементами, упорядоченными по невозрастанию [1]. K называется типом расщепления расслоения $\mathcal{F}$, числа $k_1, .., k_p$ – индексами расщепления. Расслоение тривиально тогда и только тогда, когда все его индексы расщепления равны нулю.

Представляет интерес, как связаны частные индексы расслоений из одного семейства в зависимости от выбора A^{ϕ} и S.

Пусть $(\mathcal{F},\nabla) \in \mathbf{F}$ — каноническое расслоение ($\forall i = 1,..,n \quad A^{\phi_i} = 0$ и, значит, нет зависимости от выбора S), а $(\mathcal{F},\nabla) \in \mathbf{F}$ — некоторое расслоение с параметрами A^{ϕ} и S.

Утверждение 1. *Типы расщепления K^0 и K расслоений $(\mathcal{F},\nabla)$ и $(\mathcal{F},\nabla)$ связаны соотношением*

$$K = K^0 + \sum_{i=1}^{n} \tilde{A}^{\phi_i}, \tag{3}$$

где $\tilde{A}^{\phi_i}$ — матрица A^{ϕ_i} с переставленными диагональными элементами.

В общем случае два расслоения с одинаковыми наборами параметров A^{ϕ}, но с разными S, не эквивалентны. Изучается зависимость типа расщепления расслоения от выбора S. В частности:

Утверждение 2. *Пусть Жордановы формы матриц E_i, $i = 1..n$ содержат клетки только с различными собственными значениями. Тогда тип расщепления $(\mathcal{F},\nabla)$ не зависит от способа приведения матриц E_i, $i = 1..n$ к верхнетреугольному виду (то есть от выбора набора S).*

Литература

1. *Болибрух А.А.* 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // Тр. матем. ин-та им. В.А.Стеклова. 1994. Т. 206.