$$=\frac{a^2}{\gamma}\sum_{0\le 2i\le k-1} C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i} J_{2i+3}+\frac{a}{\gamma}\sum_{0\le 2i+1\le k-1} C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1} J_{2i+4}=0. \qquad (24)$$

Из (10), (11) следуют равенства

$$\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_{2k-1}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_{2k-1}(x,t)}{\partial t}\right), \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{2k-1}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial t^2}\right). \qquad (26)$$

В свою очередь, из (25), (26) и (23), (24) следуют равенства

$$\lim_{at+x\to 2kl}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_{2k-1}(x,t)}{\partial x}\right)=0, \qquad (27)$$

$$\lim_{at+x\to 2kl}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{2k-1}(x,t)}{\partial x^2}\right)=0. \qquad (28)$$

В результате равенства (22) – (24), (27) и (28) показывают, что предельные значения функций u_{2k} и u_{2k-1} и их производные до второго порядка включительно на характеристике H_{2k}^{+} совпадают.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть в задаче (1) – (3) функции* $\varphi\in C^m[0,l]$ *и* $\psi\in C^{m-1}[0,l]$, $m>2$, *удовлетворяют условиям согласования (4), (5). Тогда при* $t<\dfrac{2(k+1)l-x}{a}$ *существует единственное классическое решение задачи (1) – (3) в виде сужения на* $0\le x\le l$ *представления (6), где функции* Φ *и* Ψ *являются соответствующими продолжениями функций* φ *и* ψ *с отрезка* $[0,l]$ *на всю ось* $\mathbb{R}$. *На каждом из характеристических треугольников* Δ_{2k} *(7) и* Δ_{2k+1} *(8) это решение представимо формулами (9) – (11).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188.

Поступила в редакцию 17.12.12.

Татьяна Сергеевна Шлапакова – аспирант кафедры математической кибернетики. Научный руководитель – Н. И. Юрчук.

Николай Иосифович Юрчук – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики.

УДК 517.925.42

А. Е. РУДЕНОК

ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ СИСТЕМ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В работе изучаются условия изохронности системы

$$dx/dt=-y+\sum_{k=2}^{n} p_k(x,y),dy/dt=x+\sum_{k=2}^{n} q_k(x,y)$$

в особой точке $O(0,0)$, где $p_k(x,y),q_k(x,y)$ – однородные многочлены k-й степени. В случае существования алгебраических инвариантных кривых и при некоторых других условиях система может иметь в особой точке $O(0,0)$ центр. В статье показано, что если система имеет центр в особой точке $O(0,0)$, то существование алгебраических инвариантных кривых с определенного вида кофактором дает достаточные условия изохронности центра. Приведен коэффициентный критерий центра системы, если правые части системы – однородные многочлены n-й степени.

Получены новые классы изохронных центров системы в случае однородных правых частей шестой степени. В статье используется переход к полярным координатам.

Ключевые слова: центр; изохронный центр; инвариантная кривая; однородные многочлены; шестая степень.

Conditions of isochronous centers of the system

$$dx/dt=-y+\sum_{k=2}^{n} p_k(x,y),dy/dt=x+\sum_{k=2}^{n} q_k(x,y)$$

in a singular point $O(0,0)$ where $p_k(x,y),q_k(x,y)$ are homogeneous polynoms of the k-th degree are studied in the paper. In case of existence of algebraic invariant curves and under some other conditions the system can have a center in a singular point $O(0,0)$. It is shown in the paper that if the system has a center in a singular point $O(0,0)$ then the existence of algebraic invariant curves with a cofactor of a specified form gives sufficient conditions of an isochronous center.

New classes of isochronous centers of the system in case of homogeneous nonlinearities of the sixth degree are obtained.

A passage to polar coordinates is used in the article.

Key words: center; isochronous center; invariant curve; homogeneous nonlinearities; sixth degree.

В работе изучаются условия изохронности системы

$$dx/dt = -y + \sum_{k=2}^{n} p_k(x,y), dy/dt = x + \sum_{k=2}^{n} q_k(x,y) \tag{1}$$

в особой точке $O(0,0)$, где $p_k(x,y), q_k(x,y)$ – однородные многочлены k-й степени. Получены новые критерии изохронности системы (1). Получены новые классы изохронных центров системы (1) в случае $k = n = 6$.

Используем теорему из работы [1], которую формулируем ниже.

Теорема 1. *Для того чтобы особая точка* $O(0,0)$, *являясь центром системы (1), была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы существовало формальное преобразование*

$$\omega(r,\varphi) = \varphi + \sum_{i=1}^{\infty} r^i v_i(\varphi), v_i(\varphi+2\pi) = v_i(\varphi), \forall i \in N \tag{2}$$

такое, что

$$d\omega/dt = 1 \tag{3}$$

в силу системы (1).

Система (1) в полярной системе координат $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$ имеет вид

$$dr/dt = P(r,\varphi), d\varphi/dt = 1 - Q(r,\varphi). \tag{4}$$

Теорема 2. *Для того чтобы особая точка* $O(0,0)$*, являясь центром системы (1), была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы система (4) имела формальную инвариантную кривую вида*

$$W(r,\varphi) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} v_i(\varphi) r^i = 0, v_i(\varphi+2\pi) = v_i(\varphi), \forall i \in N \tag{5}$$

с кофактором

$$S(r,\varphi) = Q(r,\varphi). \tag{6}$$

Доказательство. Представим (2) в виде

$$\omega(r,\varphi) = \varphi + \ln(W(r,\varphi)). \tag{7}$$

Тогда из требования (3) теоремы 1

$$d\omega/dt = ((W + W'_\varphi)(1-Q) + W'_r P)/W = 1$$

следует

$$W'_\varphi(1-Q) + W'_r P = WQ. \tag{8}$$

Равенство (8) значит, что (5) – инвариантная кривая системы (4) с кофактором (6). Теорема доказана.

Замечание. Формальность инвариантной кривой (5) означает, что при подстановке (5) в (8) коэффициенты обеих частей (8) при одинаковых степенях r равны.

Рассмотрим теперь систему

$$dx/dt = -y + p_n(x,y),\ dy/dt = x + q_n(x,y), \tag{9}$$

где $p_n(x,y),\ q_n(x,y)$ – однородные многочлены n-й степени. Система (9) в полярной системе координат $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi$ имеет вид

$$dr/dt = r^n P(\varphi),\ d\varphi/dt = 1 - r^{n-1} Q(\varphi). \tag{10}$$

Пусть $u = u(\varphi)$ – 2π-периодическая функция. Введем [1] постоянную $\underline{u(\varphi)}$ и функцию $\overline{u}(\varphi)$ по формулам

$$\underline{u(\varphi)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varphi)d\varphi,\ \ \overline{u}(\varphi) = \int (u - \underline{u})d\varphi,$$

причем в последнем интеграле постоянную интегрирования берем такую, чтобы выполнялось условие $\underline{\overline{u}(\varphi)} = 0$.

Теорема 3. *Если система (9) имеет в особой точке* $O(0,0)$ *центр и существуют постоянные* $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ *и функция* $v = v(\varphi), v(\varphi+2\pi) = v(\varphi)$ *такие, что для системы (10) выполняются условия*

$$\underline{Q} = 0,\ \ \alpha Q(-\alpha Q + \beta v) - (\alpha+\beta)vv' + \alpha\overline{Q}((n-1)\alpha P - \beta(\alpha Q - v')) = 0,$$

$$-\alpha Qv(\alpha Q - v') - \beta Q(\alpha \overline{Q} - v)v' + ((n-1)(\alpha+\beta)P - \alpha\beta Q)(\alpha\overline{Q} - v)v = 0, \tag{11}$$

то система (9) изохронна в особой точке $O(0,0)$.

Доказательство. В теореме 2 представим $W(r,\varphi)$ в виде

$$W = V^{1/\alpha}U^{1/\beta} = 0, \tag{12}$$

где

$$V = 1 + r^{n-1}v(\varphi),\ U = 1 + r^{n-1}u(\varphi),\ v(\varphi + 2\pi) = v(\varphi),\ u(\varphi+2\pi) = u(\varphi). \tag{13}$$

Запишем условие того (8), что $W(r,\varphi)$ – инвариантная кривая системы (10) с кофактором $r^{n-1}Q(\varphi)$. Имеем

$$(\alpha VU_\varphi{}' + \beta UV_\varphi{}')(1 - r^{n-1}Q) + (\alpha VU_r{}' + \beta UV_r{}')r^nP = \alpha\beta VUr^{n-1}Q. \tag{14}$$

Подставляя (13) в (14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, получим систему для определения неизвестных функций $u(\varphi), v(\varphi)$:

$$\alpha u' + \beta v' = \alpha\beta Q,\ \alpha vu' + \beta uv' - \alpha Qu' - \beta Qv' + (n-1)\alpha Pu + (n-1)\beta Pv = \alpha\beta Q(u+v),$$

$$-\alpha Qvu' - \beta Qu_1v' + (n-1)\alpha Puv + (n-1)\beta Puv = \alpha\beta Quv. \tag{15}$$

Из первого уравнения системы (15) выразим

$$u = \beta\overline{Q} - (\beta/\alpha)v \tag{16}$$

и подставим в два других. После упрощений получим условия (11). Первое условие (11) необходимо для того, чтобы функция (16) была 2π-периодической.

Теорема 4. *Если система (9) имеет в особой точке* $O(0,0)$ *центр и существуют постоянные* $\alpha \neq 0, \gamma$ *такие, что для системы (10) выполняются условия*

$$\underline{Q} = 0,\ \underline{Q^2 - (n-1)P\overline{Q}} = 0,\ 4(n-1)P(\overline{Q})^3 + \alpha^2(\overline{Q})^4 - 4(\gamma + Q\overline{Q} - \overline{(Q^2)} + (n-1)\overline{P\overline{Q}})^2 = 0, \tag{17}$$

то система (9) изохронна в особой точке $O(0,0)$.

Доказательство. Положим в (11)

$$\beta = -\alpha. \tag{18}$$

Получим условия

$$Q(Q+v) + \overline{Q}(-(n-1)P - Q\alpha + v') = 0,\ v(Q - \alpha\overline{Q} + v) - \overline{Q}v' = 0,$$

или, складывая эти уравнения,

$$Qv + \overline{Q}v' + Q^2 - \overline{Q}((n-1)P + \alpha Q) = 0,\ Q^2 - (n-1)P\overline{Q} - \alpha Q\overline{Q} + 2Qv - \alpha\overline{Q}v + v^2 = 0. \tag{19}$$

Из первого уравнения системы (19) выразим

$$v = (-\overline{(Q^2)} + (n-1)\overline{P\overline{Q}} + 1/2\alpha(\overline{Q})^2 + \gamma)/\overline{Q}. \tag{20}$$

Для того чтобы функция (20) была 2π-периодической, необходимо выполнение второго условия (17). Подставим (20) во второе уравнение системы (19). После упрощений получим третье условие (17).

Замечание. Функции $u, v,$ определяемые формулами (20), (16), непрерывны для всех значений $\varphi \in [0, 2\pi]$, за исключением, может быть, точек, для которых $\overline{Q}(\varphi) = 0$. Выражая

$$v = \sqrt{(n-1)P\overline{Q} + \alpha^2/4\overline{Q}^2} - Q + 1/2\alpha\overline{Q}$$

из второго уравнения системы (19), видим, что функции u, v непрерывны и для этих значений φ.

То есть преобразование (5) определяет взаимно однозначное соответствие траекторий системы (9) и системы с совершенной изохронностью.

Рассмотрим теперь систему (9) с порядком однородности $n = 6$ и условием обратимости. Обратимость системы здесь понимается в том смысле, что обратимая система, записанная в полярных координатах, имеет ось симметрии поля направлений $\varphi = \varphi_0$ и не меняется при одновременной замене значения t на $-t$ и значения φ на симметричное ей значение относительно этой оси. Известно [2, с. 53], что обратимая относительно оси L изохронная система необходимо имеет сильную изохронность относительно этой оси.

Мы используем также теоремы из [1], [3] , которые формулируем ниже.

Теорема 5. *Если для системы (10) с четным* n *выполняется условие*

$$(n-1)P(\varphi) + Q'(\varphi) = 0, \tag{21}$$

то система (9) имеет в $O(0,0)$ *изохронный центр.*

Теорема 6. *Если для системы (10) в случае центра* $O(0,0)$ *системы (9) выполняются условия*

$$\underline{Q} = 0,\ Q^2 - (n-1)P\overline{Q} = 0, \tag{22}$$

то система (9) имеет в $O(0,0)$ изохронный центр.

Теорема 7. *Для того чтобы обратимая система* (9) с $n=6$ *была изохронной (а значит, и сильно изохронной) в особой точке* $O(0,0)$, *достаточно, чтобы с точностью преобразований поворота* $\varphi \to \varphi+\alpha$ *и растяжения* $r \to kr$ *ее можно было свести к одной из систем с* $p_6(x,y), q_6(x,y)$, *равными соответственно:*

1) $2/3xy((9a+7b+9c)x^4+2(9a-b-15c)x^2y^2+9(a-b+c)y^4)$,

$(-(15a+5b+3c)x^6+(-27a+19b+45c)x^4y^2+3(-3a+7b-15c)x^2y^4+3(a-b+c)y^6)/3$;

2) $4/875xy(-49(5+C)^2x^4-35(5+C)(-13+7C)x^2y^2-4(-55+7C)(-5+7C)y^4)$,

$y^2(539(5+C)^2x^4+70(5+C)(-69+7C)x^2y^2-(5-7C)^2y^4)/875$;

3) $2/875xy(3(15+7C)^2x^4+320(25-7C)x^2y^2-3(25-7C)^2y^4)$,

$(-5(15+7C)^2x^6+6(15+7C)(215+7C)x^4y^2+15(-25+7C)(39+7C)x^2y^4+4(25-7C)^2y^6)/875$;

4) $2/39375xy(7(5+C)x^2+(-25+7C)y^2)(49(5+C)^2x^2+(-325+7C)(-25+7C)y^2)$,

$-(7(5+C)x^2+(-25+7C)y^2)(245(5+C)^2x^4+28(5+C)(-565+7C)x^2y^2-(25-7C)^2y^4)/118125$;

5) $(25(3+B)^2x^5y+2(-33+5B)(-1+5B)x^3y^3+(-89+5B)(-9+5B)xy^5)/150$,

$(-125(3+B)^2x^6-225(-13+B)(3+B)x^4y^2-3(-201+5B)(7+5B)x^2y^4+(9-5B)^2y^6)/900$;

6) $-64/35x^3y(9x^2-11y^2)$, $192/35x^2y^2(2x^2-3y^2)$;

7) $64/35x(5x-3y)y^3(5x+3y)$, $64/35y^6$;

8) $16/15xy(x^2+y^2)(x^2+4y^2)$, $-4/15y^2(11x^2-y^2)(x^2+y^2)$;

9) $24/5x(x-y)y(x+y)(x^2+y^2)$, $-4/5(x^2+y^2)(5x^4-11x^2y^2-4y^4)$;

10) $16/15xy(9x^4+10x^2y^2-9y^4)$, $-16/15(x-y)y^2(x+y)(6x^2+y^2)$;

11) $32/15xy(2x^4+4x^2y^2-3y^4)$, $-16/15y^2(11x^4-3x^2y^2-4y^4)$;

12) $36/15x(x-y)y(x+y)(x^2+y^2)$, $-4/5(x^2+y^2)(5x^4-14x^2y^2-y^4)$;

13) $8/13x^3y(9x^2-11y^2)$, $-8/13x^2(5x^4-24x^2y^2-9y^4)$;

14) $8/9xy(4x^4+15x^2y^2-9y^4)$, $-8/9(x-y)y^2(x+y)(11x^2+y^2)$;

15) $-1/2xy(9x^4+10x^2y^2-39y^4)$, $y^2(3x^4-15x^2y^2+2y^4)$;

16) $2/17xy(63x^4-130x^2y^2+47y^4)$, $-3/17(15x^6-117x^4y^2+25x^2y^4-3y^6)$;

17) $-16/5xy(3x^4+17x^2y^2-16y^4)$, $12/5y^2(11x^4-26x^2y^2+3y^4)$;

18) $24/5xy(7x^4-12x^2y^2+y^4)$, $-4/5(15x^6-102x^4y^2+7x^2y^4+4y^6)$;

19) $-2xy(21x^4-50x^2y^2+9y^4)$, $2(5x^6-51x^4y^2+25x^2y^4+y^6)$;

20) $4/5xy(x^2+y^2)(3x^2+5y^2)$, $-8/5x^2y^2(x^2+y^2)$;

21) $24/5xy(3x^2-2y^2)(x^2+y^2)$, $-16/5y^2(3x^2-2y^2)(x^2+y^2)$;

22) $8xy^3(x^2+y^2)$, 0.

Доказательство. Если $n=6$ и система (10) обратима, то преобразованием поворота ее можно свести к системе

$$dr/dt=r^6P(\varphi),\, d\varphi/dt=1-r^5Q(\varphi),$$

где

$$P(\varphi)=a\sin\varphi+b\sin 3\varphi+c\sin 5\varphi-d\sin 7\varphi,\, Q(\varphi)=A\cos\varphi+B\cos 3\varphi+C\cos 5\varphi+d\cos 7\varphi,$$

$a,b,c,d,A,B,C-$ некоторые постоянные.

Соответствующие функции $P(\varphi),Q(\varphi)$ для систем 1–22 приведены ниже.

1) $a\sin\varphi+b\sin 3\varphi+c\sin 5\varphi$, $5a\cos\varphi+5/3b\cos 3\varphi+c\cos 5\varphi$;

2) $(-6275+1330C-343C^2)/3500\sin\varphi-(5+7C)(55+21C)/3500\sin 3\varphi+(120-77C)/175\sin 5\varphi-$

$-\sin 7\varphi, (-25-10C-21C^2)/100\cos\varphi+3/100(-5+C)(5+7C)\cos 3\varphi+C\cos 5\varphi+\cos 7\varphi$;

3) $(6425-910C+637C^2)/3500\sin\varphi-3/3500(-155+7C)(5+7C)\sin 3\varphi+(120-77C)/175\sin 5\varphi-$

$-\sin 7\varphi, (125-70C+49C^2)/700\cos\varphi+3/700(5+7C)^2\cos 3\varphi+C\cos 5\varphi+\cos 7\varphi;$

4) $(-44875+120225C-1470C^2+343C^3)/118125\sin\varphi+(3775+1225C+49C^2)/2625\sin 3\varphi+$
$+(120-77C)/175\sin 5\varphi-\sin 7\varphi,\ (-625+975C-210C^2+49C^3)/3375\cos\varphi+$
$+(25-5C+7C^2)/25\cos 3\varphi+C\cos 5\varphi+\cos 7\varphi;$

5) $(1197-30B+25B^2)/900\sin\varphi+(48+5B)/75\sin 3\varphi-3/5\sin 5\varphi,$
$(9-6B+5B^2)/36\cos\varphi+B\cos 3\varphi+\cos 5\varphi,$

6) $(-39\sin\varphi-39\sin 3\varphi-35\sin 5\varphi-35\sin 7\varphi)/35,\ (-3\cos\varphi-9\cos 3\varphi+5\cos 5\varphi+7\cos 7\varphi)/7;$

7) $(65\sin\varphi+45\sin 3\varphi+9\sin 5\varphi-35\sin 7\varphi)/35,\ (5\cos\varphi+3\cos 3\varphi-15\cos 5\varphi+7\cos 7\varphi)/7;$

8) $(7\sin\varphi+3\sin 3\varphi)/15,\ \cos\varphi-\cos 3\varphi;$

9) $(13\sin\varphi-3\sin 3\varphi)/5,\ \cos\varphi+3\cos 3\varphi;$

10) $(18\sin\varphi+17\sin 3\varphi+15\sin 5\varphi)/15,\ (2\cos\varphi+3\cos 3\varphi-5\cos 5\varphi)/3;$

11) $(34\sin\varphi-15\sin 3\varphi+15\sin 5\varphi)/15,\ (2\cos\varphi+3\cos 3\varphi-5\cos 5\varphi)/3;$

12) $(7\sin\varphi+3\sin 3\varphi)/5,\ \cos\varphi+3\cos 3\varphi;$

13) $(26\sin\varphi+21\sin 3\varphi-5\sin 5\varphi)/26, 5/26(2\cos\varphi+9\cos 3\varphi+5\cos 5\varphi);$

14) $(18\sin\varphi+7\sin 3\varphi+5\sin 5\varphi)/18, 5/18(2\cos\varphi+3\cos 3\varphi-5\cos 5\varphi);$

15) $(16\sin\varphi-21\sin 3\varphi-5\sin 5\varphi)/16, 5/16(4\cos\varphi-9\cos 3\varphi+5\cos 5\varphi);$

16) $(17\sin\varphi+13\sin 3\varphi+5\sin 5\varphi)/17, 5/17(\cos\varphi+3\cos 3\varphi+5\cos 5\varphi);$

17) $(5\sin\varphi-26\sin 3\varphi+5\sin 5\varphi)/5,\ \cos\varphi-6\cos 3\varphi+5\cos 5\varphi;$

18) $(5\sin\varphi+26\sin 3\varphi+5\sin 5\varphi)/5,\ \cos\varphi+6\cos 3\varphi+5\cos 5\varphi;$

19) $(4\sin\varphi-19\sin 3\varphi-15\sin 5\varphi)/4, -5/4(3\cos 3\varphi+5\cos 5\varphi);$

20) $3/5(\sin\varphi+\sin 3\varphi),\ \cos\varphi-\cos 3\varphi;$

21) $(34\sin\varphi-5\sin 3\varphi+25\sin 5\varphi)/10,\ (2\cos\varphi+3\cos 3\varphi-5\cos 5\varphi)/2;$

22) $(2\sin\varphi+\sin 3\varphi-\sin 5\varphi)/2,\ (2\cos\varphi-3\cos 3\varphi+\cos 5\varphi)/2.$

Для системы 1 выполняется условие (21). Для систем 20–22 выполняются условия (22). Для систем 2–19 выполняются условия (17), причем в случаях 2–19 $\gamma=0$. Соответствующие значения α равны: $2i$ для систем 2–11, $4i$ для систем 12–15, $6i$ для систем 16–18, $8i$ для системы 19. Теорема доказана.

Теорема 8. *Изображающие точки систем 2–22 в окрестности особой точки* $O(0,0)$ *проходят за одно и то же время отрезки траекторий между границами каждого из секторов, образованного прямыми:*

2) $y=0, y=-\sqrt{7}\sqrt{5+C}/\sqrt{5-7C}x,\ y=\sqrt{7}\sqrt{5+C}/\sqrt{5-7C}x;$

3) $x=0, y=-\sqrt{15+7C}/\sqrt{25-7C}x,\ y=\sqrt{15+7C}/\sqrt{25-7C}x;$

4) $y=-\sqrt{7}\sqrt{5+C}/\sqrt{25-7C}x,\ y=\sqrt{7}\sqrt{5+C}/\sqrt{25-7C}x;$

5) $y=-\sqrt{5}\sqrt{3+B}/\sqrt{9-5B}x,\ y=\sqrt{5}\sqrt{3+B}/\sqrt{9-5B}x;$

6) $y=0, x=0;$ 7) $y=0, x=0;$ 8) $y=0;$ 9) $x=0;$ 10) $y=0, x=0;$ 11) $y=0, x=0;$ 12) $x=0;$
13) $x=0;$ 14) $y=0, x=0;$ 15) $y=0;$ 16) $y=\sqrt{3}x,\ y=-\sqrt{3}x;$ 17) $y=0;$ 18) $x=0;$
19) $x=0;$ 20) $y=0;$ 21) $y=0;$ 22) $y=0, x=0.$

Доказательство. Соответствующие преобразования (7), (12), (18), которые переводят системы 2–22 в систему с совершенной изохронностью:

2) $\omega=\varphi+\ln\left(\dfrac{1+1/175e^{-i\varphi}r^5(15+7C+20\cos 2\varphi)^2\sin^2\varphi}{1+1/175e^{i\varphi}r^5(15+7C+20\cos 2\varphi)^2\sin^2\varphi}\right)^{-\frac{i}{2}};$

3) $\omega=\varphi+\ln\left(\dfrac{1-1/175e^{-i\varphi}r^5\cos^2\varphi(-5+7C+20\cos 2\varphi)^2}{1-1/175e^{i\varphi}r^5\cos^2\varphi(-5+7C+20\cos 2\varphi)^2}\right)^{-\frac{i}{2}};$

$$4)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{23625-e^{-i\varphi}r^5(5+7C+30\cos2\varphi)^3}{23625-e^{i\varphi}r^5(5+7C+30\cos2\varphi)^3}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$5)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{180-e^{-i\varphi}r^5(3+5B+12\cos2\varphi)^2}{180-e^{i\varphi}r^5(3+5B+12\cos2\varphi)^2}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$6)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{-7+8r^5(i\cos\varphi+\sin\varphi)\sin^3 2\varphi}{-7+8r^5(-i\cos\varphi+\sin\varphi)\sin^3 2\varphi}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$7)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{7i-64e^{-i\varphi}r^5\cos\varphi\sin^5\varphi}{7i+64e^{i\varphi}r^5\cos\varphi\sin^5\varphi}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$8)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{-3+4e^{-i\varphi}r^5\sin^2\varphi}{-3+4e^{i\varphi}r^5\sin\varphi^2\varphi}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$9)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{-1+4e^{-i\varphi}r^5\cos^2\varphi}{-1+4e^{i\varphi}r^5\cos^2\varphi}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$10)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{3+16r^5\cos\varphi\sin^3\varphi(i\cos\varphi+\sin\varphi)}{3+16r^5\cos\varphi\sin^3\varphi(-i\cos\varphi+\sin\varphi)}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$11)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{3i-4ie^{-i\varphi}r^5\sin^2 2\varphi}{3i+4r^5(-i\cos\varphi+\sin\varphi)\sin^2 2\varphi}\right)^{-\frac{i}{2}};$$

$$12)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{-1+4e^{-2i\varphi}r^5\cos\varphi}{-1+4e^{2i\varphi}r^5\cos\varphi}\right)^{-\frac{i}{4}};$$

$$13)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{13-40e^{-2i\varphi}r^5\cos^3\varphi}{13-40e^{2i\varphi}r^5\cos^3\varphi}\right)^{-\frac{i}{4}};$$

$$14)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{9i+10(-1+e^{-4i\varphi})r^5\sin\varphi}{9i-10(-1+e^{4i\varphi})r^5\sin\varphi}\right)^{-\frac{i}{4}};$$

$$15)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{i+5e^{-2i\varphi}r^5\sin^3\varphi}{i-5e^{2i\varphi}r^5\sin^3\varphi}\right)^{-\frac{i}{4}};$$

$$16)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{-17+15e^{-3i\varphi}r^5(1+2\cos2\varphi)}{-17+15e^{3i\varphi}r^5(1+2\cos2\varphi)}\right)^{-\frac{i}{6}};$$

$$17)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{1+12e^{-3i\varphi}r^5(\sin\varphi)^2}{1+12e^{3i\varphi}r^5(\sin\varphi)^2}\right)^{-\frac{i}{6}};$$

$$18)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{-1+12e^{-3i\varphi}r^5\cos^2\varphi}{-1+12e^{3i\varphi}r^5\cos^2\varphi}\right)^{-\frac{i}{6}};$$

$$19)\ \omega=\varphi+\ln\left(\frac{1+10e^{-4i\varphi}r^5\cos\varphi}{1+10e^{4i\varphi}r^5\cos\varphi}\right)^{-\frac{i}{8}};$$

$$20)\ \omega=\varphi+\frac{4}{3}r^5\sin^3\varphi;\quad 21)\ \omega=\varphi+\frac{8}{5}r^5\sin^5\varphi;\quad 22)\ \omega=\varphi+8r^5\cos^2\varphi\sin^3\varphi.$$

Прямые в условии теоремы являются инвариантными прямыми этих отображений. Теорема доказана.

В [2, с. 11] дано определение изохронности n-го порядка. Примеры натуральных значений n известны: общая изохронность n=1, сильная изохронность n=2, 3, … и так далее. Не было, однако, примеров n не натуральных.

Теорема 9. *Для любого* $n\geq 1$ *существуют системы с изохронностью n-го порядка.*

Доказательство. Для системы 2 при $C=(-15+20\cos(2\pi/n))/7$ угол между прямыми $y=-\sqrt{7}\sqrt{5+C}/\sqrt{5-7C}x$, $y=\sqrt{7}\sqrt{5+C}/\sqrt{5-7C}x$ равен $2\pi/n$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Руденок А. Е. Условия изохронности центра и фокуса в полярных координатах // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 10. С. 1360–1372.

2. Амелькин В. В., Калитин Б. С. Нелинейные изохронные и импульсные колебания в системах второго порядка. Минск, 2008.

3. Руденок А. Е. Сильная изохронность центра и фокуса систем с однородными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 2. С. 154–161.

Поступила в редакцию 15.05.13.

Александр Евгеньевич Руденок – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа.

УДК 519.24

А. И. НОВИК

ДВА ПОДХОДА К ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ КОПУЛ

В последнее время особое внимание уделяется моделям копул, позволяющим из многомерного распределения получить маргинальные распределения и оценить их параметры. Целью работы является проведение сравнительного анализа метода максимального правдоподобия с полупараметрическим методом статистического оценивания параметров копул. Приводится определение копулы и рассматриваются ее свойства. Описаны исследуемые методы оценивания параметров копул. Для двух сгенерированных по нормальному закону распределения последовательностей случайных величин построены с заданным значением параметра функции копулы: Стьюдента, гауссовская, Клейтона, Гумбеля, Франка. Методом максимального правдоподобия и полупараметрическим методом оценены параметры исследуемых функций копулы. Сравниваются заданные и оцененные значения параметров построенных копул. В результате показано, что параметрический метод максимального правдоподобия позволяет получать более точные оценки для исследуемых данных. Для практической реализации разработан командный код в пакете R.

Ключевые слова: копула; параметрический метод; метод максимального правдоподобия; полупараметрический метод.

Recently special attention is given to copulas models, which allows to obtain the distribution of multi-dimensional marginal distributions and estimate their parameters. The aim is to conduct a comparative analysis of the maximum likelihood method with a semi-parametric method of statistical estimation of the parameters of copulas. Is the definition of copulas and discusses its properties. Describes the methods of estimating the parameters studied copulas. For two generated by normal distribution of sequences of random variables are constructed with a given copula function parameter: Student, Gaussian, Clayton, Gumbel, Frank. By maximum likelihood and semi-parametric method evaluated parameters of the functions copula. Compares the specified and estimated values parameters constructed copulas. The result shows that the parametric maximum likelihood method allows to obtain more accurate estimates for the experimental data. For practical implementation of the code developed by the team in the package R.

Key words: copula; parametric method; maximum likelihood method; semi-parametric method.

Цель работы – проведение сравнительного анализа двух подходов для оценивания параметров копул. Приводится определение копулы и рассматриваются ее свойства. Описан иллюстративный пример моделирования двумерного распределения и с помощью пакета R оцениваются параметры копул.

Период кризиса в банковской сфере еще раз подчеркнул цену ошибки, которую пришлось заплатить риск-менеджерам за принятие предпосылки о нормальном характере распределения рисков. Поэтому в последнее время активно исследуются способы моделирования совместного многомерного распределения, соответствующего наблюдаемым данным, и проводятся исследования их асимметричности и наличия «тяжелых хвостов». Особое внимание уделяется моделям копул, позволяющим из многомерного распределения получить маргинальные распределения и исследовать их зависимость.

Определение. Функция $C(x,y)$ называется копулой двух переменных x и y, определенных на множестве $[0, 1]^2$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $C(x, 0) = 0$, $C(0, y) = 0$;
2. $C(1, y) = y$, $C(x, 1) = x$;
3. $C(x_2, y_2) + C(x_1, y_1) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) \geq 0$, где $(x_1, y_1) \in [0,1]^2$, $(x_2, y_2) \in [0,1]^2$ и $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$.

Свойства копулы

1. $0 \leq C(x, y) \leq 1$.
2. Любая копула находится в пределах

$$\max(x + y - 1,0) \leq C(x, y) \leq \min(x, y),$$

которые называются границами Фреше – Хефдинга.

3. Копула C_2 доминирует над копулой C_1, если для любых x, y $C_1(x, y) \leq C_2(x, y)$.

Для любых $(x_1, x_2) \in [0,1]^2, (y_1, y_2) \in [0,1]^2$ справедливо неравенство

$$|C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Использование копул для моделирования совместных вероятностных распределений основано на теореме Скляра, доказанной в 1959 году.