БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л., 1947.
2. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., 1966.
3. Горбузов В. Н. Проективный атлас траекторий дифференциальных систем второго порядка // Весн. ГрДУ. Сер. 2. 2011. № 2. С. 15–26.
4. Горбузов В. Н. Траектории проективно приведенных дифференциальных систем // Весн. ГрДУ. Сер. 2. 2012. № 1. С. 39–52.
5. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. Минск, 1983.
6. Тыщенко В. Ю. Об инвариантах дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 5. С. 752–755.
7. Тыщенко В. Ю. Базис абсолютных инвариантов вполне разрешимых линейных и дробно-линейных дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 5. С. 758–760.
8. Тыщенко В. Ю. О компактных инвариантных гиперповерхностях дискретных динамических систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 1005–1006.

Поступила в редакцию 24.10.12.

Вячеслав Веславович Блашкевич – аспирант кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Гродненского государственного университета имени Янки Купалы. Научный руководитель – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Гродненского государственного университета имени Янки Купалы В. Ю. Тыщенко.

УДК 517.954

Т. С. ШЛАПАКОВА, Н. И. ЮРЧУК

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ С ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ ПРОИЗВОДНОЙ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ, НАПРАВЛЕННОЙ ПО ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Посвящена исследованию смешанной задачи для уравнения колебания ограниченной струны. Рассматривается случай, когда производная по времени присутствует в краевом условии, т. е. когда к концу струны приложена динамическая сила. Предполагается, что производная по времени в краевом условии направлена по характеристике. Доказано существование единственного классического решения задачи, которое представлено как сужение некоторой функции, построенной специальным методом, предложенным в данной статье. Он основывается на известном методе отражений с использованием результатов решения схожей задачи для полуограниченной струны. Найдены формулы решения для поставленной задачи, условия согласования начальных и краевых условий.

Ключевые слова: смешанная задача для уравнения колебания; метод отражений; ограниченная струна; продолжение функции.

This paper deals with a mixed problem for vibration equation. It's considered a case of the finite string with time dependent derivative in the boundary condition. It's mean that dynamic force applies to the end of a finite string. Derivative in the boundary condition is directed along the characteristics. There exists a unique classical solution of this problem which is represented as a restriction of some function. The function is obtained by special method using the results of the solution of a mixed problem for a semi-bounded string. The method is similar with a reflection method for the solution of a mixed problem for a finite string with fixed ends. Formulas of the solution of considered problem were found in the article. Matching conditions between initial and boundary conditions were given. By way of conclusion a theorem with main results was given in the end of this paper.

Key words: mixed problem; vibration equation; reflection method; finite string; contraction of the function.

Для ограниченной струны рассматривается следующая смешанная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < l,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u\,|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u\right)\right|_{x=0} = 0,\ u\,|_{x=l} = 0,\ \gamma \ne 0,\ \gamma \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Производная $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ в первом краевом условии (3) означает, что к концу струны $x = 0$ приложены и динамические силы.

В случае полуограниченной струны $0 \le x < \infty$ задача рассмотрена в работе [1].

Предполагается, что функции $\varphi(x) \in C^m[0,l]$ и $\psi(x) \in C^{m-1}[0,l],\ (m > 2)$ удовлетворяют следующим условиям согласования с (3):

$$\varphi^{(2k)}(l)=0,\ 0\le 2k\le m,\ \psi^{(2k)}(l)=0,\ 0\le 2k\le m-1,$$

$$J_{2k+1}\equiv a\varphi^{(2k+1)}(0)+\gamma\varphi^{(2k)}(0)+\psi^{(2k)}(0)=0,\ 0\le 2k+1\le m, \tag{4}$$

$$J_{2k+2}\equiv a^2\varphi^{(2k+2)}(0)+a\psi^{(2k+1)}(0)+\gamma\psi^{(2k)}(0)=0,\ 0\le 2k+2\le m. \tag{5}$$

Будем искать решение задачи в виде сужения на $0\le x\le l, t\ge 0$ представления

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x+at)+\Phi(x-at)}{2}+\frac{\Psi(x+at)-\Psi(x-at)}{2a}, \tag{6}$$

где функция Φ является нечетной, а функция Ψ – четной относительно точки $x=l$.

Определяем функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ соотношениями

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & 0\le x\le 2nl,\\ \varphi_{-n}(x), & -2nl\le x\le 0,\end{cases}\qquad \Psi(x)=\begin{cases}\psi_n(x), & 0\le x\le 2nl,\\ \psi_{-n}(x), & -2nl\le x\le 0,\end{cases}$$

где функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_n(x)$ $(n=1,2,...)$ вычисляются следующим образом. Сначала определим функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x), 0\le x<l,\\ -\varphi(2l-x),\ l\le x\le 2l,\end{cases}\quad \psi_1(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x\psi(\xi)d\xi, & 0\le x<l,\\ \int\limits_0^{2l-x}\psi(\xi)d\xi, & l\le x\le 2l.\end{cases}$$

Очевидно, $\varphi_1\in C^m[0,2l]$, $\psi_1\in C^m[0,2l]$.

Далее продолжим функции $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ на отрезок $-2l\le x\le 0$ по формулам (см. [1])

$$\varphi_{-1}(x)=-\varphi_1(-x)-\frac{2a}{\gamma}\varphi_1'(-x),$$

$$\psi_{-1}(x)=\psi_1(-x)+\frac{2a}{\gamma}\psi_1'(-x),$$

$$\varphi_{-1}(x)\in C^{m-1}[-2l,0],\ \psi_{-1}(x)\in C^{m-1}[-2l,0].$$

Затем определим функции $\varphi_2(x)$ и $\psi_2(x)$:

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), 0\le x<2l,\\ -\varphi_{-1}(2l-x)=\varphi_1(x-2l)+\dfrac{2a}{\gamma}\varphi_1'(x-2l), 2l\le x\le 4l,\end{cases}$$

$$\psi_2(x)=\begin{cases}\psi_1(x), 0\le x<2l,\\ \psi_{-1}(2l-x)=\psi_1(x-2l)+\dfrac{2a}{\gamma}\psi_1'(-x),\ 2l\le x\le 4l,\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)\in C^m[0,2l)\cup C^{m-1}[2l,4l],\ \psi_2(x)\in C^m[0,2l)\cup C^{m-1}[2l,4l]$$

и продолжим их на отрезок $-4l\le x\le 0$ по формулам

$$\varphi_{-2}(x)=\begin{cases}-\varphi_1(-x)-\dfrac{2a}{\gamma}\varphi_1'(-x),\ -2l<x\le 0,\\ -\varphi_1(-2l-x)-\dfrac{4a}{\gamma}\varphi_1'(-2l-x)-\left(\dfrac{2a}{\gamma}\right)^2\varphi_1''(-2l-x),\ -4l\le x\le -2l,\end{cases}$$

$$\psi_{-2}(x)=\begin{cases}\psi_1(-x)+\dfrac{2a}{\gamma}\psi_1'(-x), -2l<x\le 0,\\ \psi_1(-2l-x)+\dfrac{4a}{\gamma}\psi_1'(-2l-x)+\left(\dfrac{2a}{\gamma}\right)^2\psi_1''(-2l-x),\ -4l\le x\le -2l,\end{cases}$$

$$\varphi_{-2}(x)\in C^{m-1}(-2l,0]\cup C^{m-2}[-4l,-2l],\ \psi_{-2}(x)\in C^{m-1}(-2l,0]\cup C^{m-2}[-4l,-2l].$$

Аналогично определяются функции

$$\varphi_3(x)=\begin{cases}\varphi_2(x),\ 0\le x<4l,\\ -\varphi_{-2}(2l-x),\ 4l\le x\le 6l,\end{cases}\quad \psi_3(x)=\begin{cases}\psi_2(x),\ 0\le x<4l,\\ \psi_{-2}(2l-x),\ 4l\le x\le 6l,\end{cases}$$

$$\varphi_3(x)\in C^m[0,2l)\cup C^{m-1}[2l,4l)\cup C^{m-2}[4l,6l],$$

$$\psi_3(x)\in C^m[0,2l)\cup C^{m-1}[2l,4l)\cup C^{m-2}[4l,6l].$$

Продолжая процесс далее, получим следующие формулы:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\varphi_1(x),\ 0\le x<2l,\\ D_\gamma\varphi_1(x-2l),\ 2l\le x<4l,\\ \ldots\\ D_\gamma^{n-1}\varphi_1(x-2(n-1)l),\ 2(n-1)l\le x\le 2nl,\end{cases}$$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\psi_1(x),\ 0\le x<2l,\\ D_\gamma\psi_1(x-2l),\ 2l\le x<4l,\\ \ldots\\ D_\gamma^{n-1}\psi_1(x-2(n-1)l),\ 2(n-1)l\le x\le 2nl,\end{cases}$$

$$\varphi_{-n}(x)=\begin{cases}-D_\gamma\varphi_1(-x),\ -2l<x\le 0,\\ -D_\gamma^2\varphi_1(-2l-x),\ -4l\le x\le -2l,\\ \ldots\\ -D_\gamma^n\varphi_1(-(2n-2)l-x),\ -2nl\le x\le(-2n+2)l,\end{cases}$$

$$\psi_{-n}(x)=\begin{cases}D_\gamma\psi_1(-x),\ -2l<x<0,\\ D_\gamma^2\psi_1(-2l-x),\ -4l\le x\le -2l,\\ \ldots\\ D_\gamma^n\psi_1(-(2n-2)l-x),\ -2nl\le x\le(-2n+2)l,\end{cases}$$

где $D_\gamma h(x)=h(x)+\dfrac{2a}{\gamma}\dfrac{dh(x)}{dx},\ n\le m.$

Очевидно,

$$\varphi_n,\psi_n\in\bigcup_{k=1}^{n-1}C^{m-k+1}[(2k-2)l,2kl)\bigcup C^{m-n+1}[(2n-2)l,2nl],\ n\le m,$$

$$\varphi_{-n},\psi_{-n}\in\bigcup_{k=1}^{n-1}C^{m-k}(-2kl,(2-2k)l]\bigcup C^{m-n}[-2nl,(2-2n)l],\ n\le m.$$

Обозначим множества

$$\Delta_0=\{(x,t):0<x<l,0<t<\frac{x}{a}\},$$

$$\Delta_{2k}=\{(x,t):0<x<l,\frac{2kl-x}{a}<t<\frac{2kl+x}{a}\},\ k\ge 1, \tag{7}$$

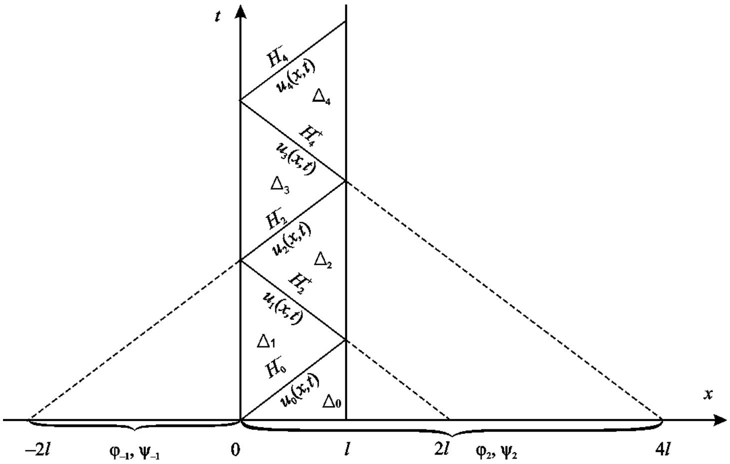
$$\Delta_{2k+1}=\{(x,t):0<x<l,\frac{2kl+x}{a}<t<\frac{2(k+1)l-x}{a}\},\ k\ge 0, \tag{8}$$

$$H_{2k}^{+}=\{(x,t):0<x<l,\ x+at=2kl\},\ k\ge 1,$$

$$H_{2k}^{-}=\{(x,t):0<x<l,\ x-at=-2kl\},\ k\ge 0.$$

При этом $(0,l)\times(0,\infty)=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}(\Delta_{2k}\cup\Delta_{2k+1}\cup H_{2k}^{+}\cup H_{2k}^{-})$. Множества H_{2k}^{+} и H_{2k}^{-} лежат на характеристиках. Множества Δ_k назовем характеристическими треугольниками.

Пусть $u_k(x,t)$ – сужения функции $u(x,t)$, определяемой формулой (6) на множествах Δ_k (рисунок):



Разбиение области $(0,l)\times(0,\infty)$. Метод построения функций φ_n, ψ_n, φ_{-n}, ψ_{-n}

$$u_0(x,t)=\frac{\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)}{2}+\frac{\psi_1(x+at)-\psi_1(x-at)}{2a}, \tag{9}$$

$$u_{2k}(x,t)=\frac{D_\gamma^k\varphi_1(at+x-2kl)-D_\gamma^k\varphi_1(at-x-2(k-1)l)}{2}+$$
$$+\frac{D_\gamma^k\psi_1(at+x-2kl)-D_\gamma^k\psi_1(at-x-2(k-1)l)}{2a},\ k\ge 1, \tag{10}$$

$$u_{2k+1}(x,t)=\frac{D_\gamma^k\varphi_1(at+x-2kl)-D_\gamma^{k+1}\varphi_1(at-x-2(k-1)l)}{2}+$$
$$+\frac{D_\gamma^k\psi_1(at+x-2kl)-D_\gamma^{k+1}\psi_1(at-x-2(k-1)l)}{2a},\ k\ge 0. \tag{11}$$

Очевидно, $u_0\in C^m(\Delta_0), u_{2k}\in C^{m-k}(\Delta_{2k}), u_{2k+1}\in C^{m-k-1}(\Delta_{2k+1})$ и при $m-k-1\ge 2$ эти функции удовлетворяют уравнению (1).

Функция u_0 удовлетворяет начальным условиям (2). Кроме того,

$$\lim_{x\to l}u_0=\frac{1}{2}\lim_{x\to l}\varphi_1(x+at)+\frac{1}{2}\lim_{x\to l}\varphi_1(x-at)+\frac{1}{2a}\left[\lim_{x\to l}\int_0^{2l-x-at}\psi(\xi)d\xi-\lim_{x\to l}\int_0^{x-at}\psi(\xi)d\xi\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to l}\varphi(2l-x-at)+\frac{1}{2}\lim_{x\to l}\varphi(x-at)+\frac{1}{2a}\lim_{x\to l}\int_{x-at}^{2l-x-at}\psi(\xi)d\xi=0,$$

$$\lim_{x\to l}u_{2k}(x,l)=\frac{D_\gamma^k\varphi_1(at-(2k-1)l)-D_\gamma^k\varphi_1(at-(2k-1)l)}{2}+$$
$$+\frac{D_\gamma^k\psi_1(at-(2k-1)l)-D_\gamma^k\psi_1(at-(2k-1)l)}{2a}=0,\ k\ge 1.$$

Следовательно, функции $u_{2k}(x,t)$ удовлетворяют второму условию из (3). Если показать, что функции u_{2k+1} удовлетворяют первому условию из (3), а предельные значения функций u_{2k} и u_{2k+1} и их производные до второго порядка включительно на характеристиках H_{2k}^+ и H_{2k}^- совпадают, то тем самым будет доказано, что функция $u(x,t)$, определяемая формулой (6), является классическим решением задачи (1) – (3) при $t<\dfrac{2(k+1)l-x}{a}$, $k\le m-3$. Сначала покажем, что функции u_{2k+1} удовлетворяют первому условию из (3). Вычислим

$$u_{2k+1}(x,t)|_{x=0}=\frac{D_\gamma^k\varphi_1(at-(2k-1)l)-D_\gamma^k\varphi_1(at-(2k-1)l)}{2}+$$

$$+\frac{D_\gamma^k\psi_1(at-(2k-1)l)-D_\gamma^k\psi_1(at-(2k-1)l)}{2a}=-\frac{a}{\gamma}D_\gamma^k\varphi_1'(at-2kl)-\frac{1}{\gamma}D_\gamma^k\psi_1'(at-2kl), \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_{2k+1}(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=0}=-\frac{a^2}{\gamma}D_\gamma^k\varphi_1''(at-2kl)-\frac{a}{\gamma}D_\gamma^k\psi_1''(at-2kl), \quad (13)$$

$$\frac{\partial u_{2k+1}(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=$$

$$=\frac{a}{\gamma}D_\gamma^k\varphi_1''(at-2kl)+\frac{1}{\gamma}D_\gamma^k\psi_1''(at-2kl)+D_\gamma^k\varphi_1'(at-2kl)+\frac{1}{a}D_\gamma^k\psi_1'(at-2kl). \quad (14)$$

Здесь $0<at-2kl<2l.$ Подставив значения (12) – (14) в первое граничное условие из (3), получим

$$\left.\left(\frac{\partial u_{2k+1}}{\partial t}+a\frac{\partial u_{2k+1}}{\partial x}+\gamma u_{2k+1}\right)\right|_{x=0}=-\frac{a^2}{\gamma}D_\gamma^k\varphi_1''(at-2kl)-$$

$$-\frac{a}{\gamma}D_\gamma^k\psi_1''(at-2kl)+\frac{a^2}{\gamma}D_\gamma^k\varphi_1''(at-2kl)+\frac{a}{\gamma}D_\gamma^k\psi_1''(at-2kl)+$$

$$+aD_\gamma^k\varphi_1'(at-2kl)+D_\gamma^k\psi_1'(at-2kl)-aD_\gamma^k\varphi_1'(at-2kl)-D_\gamma^k\psi_1'(at-2kl)=0.$$

Покажем, что предельные значения функций u_{2k}, u_{2k+1} и их производные до второго порядка включительно на характеристике H_{2k}^- совпадают. Из (9) – (11) следует

$$\lim_{at-x\to 2kl}(u_{2k}(x,t)-u_{2k+1}(x,t))=\frac{D_\gamma^{k+1}\varphi_1(0)-D_\gamma^k\varphi_1(2l)}{2}+\frac{D_\gamma^{k+1}\psi_1(0)-D_\gamma^k\psi_1(2l)}{2a}=$$

$$=\sum_{0\le 2i\le k}C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i}\varphi^{(2i)}(0)+\frac{a}{\gamma}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i\varphi^{(i+1)}(0)+\frac{1}{a}\sum_{1\le 2i+1\le k}C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1}\psi^{(2i)}(0)+$$

$$+\frac{1}{\gamma}\sum_{j=0}^{k}C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i\psi^{(i)}(0)=\frac{1}{\gamma}\sum_{0\le 2i\le k}C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i}J_{2i+1}+\frac{1}{a\gamma}\sum_{0\le 2i+1\le k}C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1}J_{2i+2}=0, \quad (15)$$

$$\lim_{at-x\to 2kl}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_{2k+1}(x,t)}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(D_\gamma^{k+1}\varphi_1'(0)-D_\gamma^k\varphi_1'(2l)\right)+\frac{1}{2}\left(D_\gamma^{k+1}\psi_1'(0)-D_\gamma^k\psi_1'(2l)\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left[\sum_{0\le i\le k}C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i\varphi^{(i+1)}(0)+\frac{2a}{\gamma}\sum_{0\le i\le k}C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i\varphi^{(i+2)}(0)-\sum_{0\le i\le k}C_k^i\left(-\frac{2a}{\gamma}\right)^i\varphi^{(i+1)}(0)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\sum_{0\le i\le k}C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i\psi^{(i)}(0)+\frac{2a}{\gamma}\sum_{0\le i\le k}C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i\psi^{(i+1)}(0)+\sum_{0\le i\le k}C_k^i\left(-\frac{2a}{\gamma}\right)^i\psi^{(i)}(0)\right]=$$

$$=\sum_{0\le 2i\le k}C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i}\left[\frac{a^2}{\gamma}\varphi^{(2i+2)}(0)+\frac{a}{\gamma}\psi^{(2i+1)}(0)+\psi^{(2i)}(0)\right]+$$

$$+\sum_{1\le 2i+1\le k}C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1}\left[a\varphi^{(2i+2)}(0)+\frac{a^2}{\gamma}\varphi^{(2i+3)}(0)+\frac{a}{\gamma}\psi^{(2i+2)}(0)\right]=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\sum_{0\le 2i\le k}C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i}J_{2i+2}+\frac{a}{\gamma}\sum_{0\le 2i+1\le k}C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1}J_{2i+3}=0, \quad (16)$$

$$\lim_{at-x\to 2kl}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{2k+1}(x,t)}{\partial t^2}\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(D_\gamma^{k+1}\varphi_1''(0)-D_\gamma^k\varphi_1''(2l)\right)+\frac{a}{2}\left(D_\gamma^{k+1}\psi_1''(0)-D_\gamma^k\psi_1''(2l)\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\sum_{0\le i\le k} C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i \varphi^{(i+2)}(0)+\frac{2a}{\gamma}\sum_{0\le i\le k} C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i \varphi^{(i+3)}(0)+\sum_{0\le i\le k} C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i \varphi^{(i+2)}(0)\right]+$$

$$+\frac{a}{2}\left[\sum_{0\le i\le k} C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i \psi^{(i+1)}(0)+\frac{2a}{\gamma}\sum_{0\le i\le k} C_k^i\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^i \psi^{(i+2)}(0)-\sum_{0\le i\le k} C_k^i\left(-\frac{2a}{\gamma}\right)^i \psi^{(i+1)}(0)\right]=$$

$$=\sum_{0\le 2i\le k} C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i}\left[a^2\varphi^{(2i+2)}(0)+\frac{a^3}{\gamma}\psi^{(2i+3)}(0)+\frac{a^2}{\gamma}\psi^{(2i+2)}(0)\right]+$$

$$+\sum_{1\le 2i+1\le k} C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1}\left[\frac{a^3}{\gamma}\varphi^{(2i+4)}(0)+\frac{a^2}{\gamma}\varphi^{(2i+3)}(0)+a\psi^{(2i+2)}(0)\right]=$$

$$=\frac{a^2}{\gamma}\sum_{0\le 2i\le k} C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i} J_{2i+3}+\frac{a}{\gamma}\sum_{0\le 2i+1\le k} C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1} J_{2i+4}=0. \qquad (17)$$

Из (9) – (11) также следуют равенства

$$\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_{2k+1}(x,t)}{\partial x}=-\frac{1}{a}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_{2k+1}(x,t)}{\partial t}\right), \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{2k+1}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{2k+1}(x,t)}{\partial t^2}\right). \qquad (19)$$

В свою очередь, из (18), (19) и (16), (17) – равенства

$$\lim_{at-x\to 2kl}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_{2k+1}(x,t)}{\partial x}\right)=0, \qquad (20)$$

$$\lim_{at-x\to 2kl}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{2k+1}(x,t)}{\partial x^2}\right)=0. \qquad (21)$$

Таким образом, равенства (15) – (17), (20) и (21) показывают, что предельные значения функций u_{2k} и u_{2k+1} и их производные до второго порядка включительно на характеристике H_{2k}^{-} совпадают. Теперь покажем, что предельные значения функций u_{2k} и u_{2k-1} и их производные до второго порядка включительно совпадают на характеристике H_{2k}^{+}. Аналогично, как и в (15), получим

$$\lim_{at+x\to 2kl}\left(u_{2k}(x,t)-u_{2k-1}(x,t)\right)=\frac{D_\gamma^k\varphi_1(0)-D_\gamma^{k-1}\varphi_1(2l)}{2}+\frac{D_\gamma^k\psi_1(0)-D_\gamma^{k-1}\psi_1(2l)}{2a}=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\sum_{0\le 2i\le k-1} C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i} J_{2i+1}+\frac{1}{a\gamma}\sum_{0\le 2i+1\le k-1} C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1} J_{2i+2}=0. \qquad (22)$$

Далее, аналогично, как и в (16), имеем

$$\lim_{at+x\to 2kl}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_{2k-1}(x,t)}{\partial t}\right)=$$

$$=\frac{a}{2}\left(D_\gamma^k\varphi_1'(0)-D_\gamma^{k-1}\varphi_1'(2l)\right)+\frac{1}{2}\left(D_\gamma^k\psi_1'(0)-D_\gamma^{k-1}\psi_1'(2l)\right)=$$

$$=\frac{1}{\gamma}\sum_{0\le 2i\le k-1} C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i} J_{2i+2}+\frac{a}{\gamma}\sum_{0\le 2i+1\le k-1} C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1} J_{2i+3}=0. \qquad (23)$$

Наконец, аналогично, как и в (17), получим

$$\lim_{at+x\to 2kl}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{2k-1}(x,t)}{\partial t^2}\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(D_\gamma^k\varphi_1''(0)-D_\gamma^{k-1}\varphi_1''(2l)\right)+\frac{a}{2}\left(D_\gamma^k\psi_1''(0)-D_\gamma^{k-1}\psi_1''(2l)\right)=$$

$$=\frac{a^2}{\gamma}\sum_{0\le 2i\le k-1}C_k^{2i}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i}J_{2i+3}+\frac{a}{\gamma}\sum_{0\le 2i+1\le k-1}C_k^{2i+1}\left(\frac{2a}{\gamma}\right)^{2i+1}J_{2i+4}=0. \quad (24)$$

Из (10), (11) следуют равенства

$$\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_{2k-1}(x,t)}{\partial x}=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial u_{2k-1}(x,t)}{\partial t}\right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{2k-1}(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial t^2}\right). \quad (26)$$

В свою очередь, из (25), (26) и (23), (24) следуют равенства

$$\lim_{at+x\to 2kl}\left(\frac{\partial u_{2k}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u_{2k-1}(x,t)}{\partial x}\right)=0, \quad (27)$$

$$\lim_{at+x\to 2kl}\left(\frac{\partial^2 u_{2k}(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_{2k-1}(x,t)}{\partial x^2}\right)=0. \quad (28)$$

В результате равенства (22) – (24), (27) и (28) показывают, что предельные значения функций u_{2k} и u_{2k-1} и их производные до второго порядка включительно на характеристике H_{2k}^{+} совпадают.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть в задаче (1) – (3) функции* $\varphi\in C^m[0,l]$ *и* $\psi\in C^{m-1}[0,l]$, $m>2$, *удовлетворяют условиям согласования (4), (5). Тогда при* $t<\dfrac{2(k+1)l-x}{a}$ *существует единственное классическое решение задачи (1) – (3) в виде сужения на* $0\le x\le l$ *представления (6), где функции* Φ *и* Ψ *являются соответствующими продолжениями функций* φ *и* ψ *с отрезка* $[0,l]$ *на всю ось* $\mathbb{R}$. *На каждом из характеристических треугольников* Δ_{2k} *(7) и* Δ_{2k+1} *(8) это решение представимо формулами (9) – (11).*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Барановская С. Н., Юрчук Н. И. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1188.

Поступила в редакцию 17.12.12.

Татьяна Сергеевна Шлапакова – аспирант кафедры математической кибернетики. Научный руководитель – Н. И. Юрчук.

Николай Иосифович Юрчук – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической кибернетики.

УДК 517.925.42

А. Е. РУДЕНОК

ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ СИСТЕМ С ОДНОРОДНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В работе изучаются условия изохронности системы

$$dx/dt=-y+\sum_{k=2}^{n}p_k(x,y), dy/dt=x+\sum_{k=2}^{n}q_k(x,y)$$

в особой точке $O(0,0)$, где $p_k(x,y), q_k(x,y)$ – однородные многочлены k-й степени. В случае существования алгебраических инвариантных кривых и при некоторых других условиях система может иметь в особой точке $O(0,0)$ центр. В статье показано, что если система имеет центр в особой точке $O(0,0)$, то существование алгебраических инвариантных кривых с определенного вида кофактором дает достаточные условия изохронности центра. Приведен коэффициентный критерий центра системы, если правые части системы – однородные многочлены n-й степени.

Получены новые классы изохронных центров системы в случае однородных правых частей шестой степени. В статье используется переход к полярным координатам.

Ключевые слова: центр; изохронный центр; инвариантная кривая; однородные многочлены; шестая степень.

Conditions of isochronous centers of the system

$$dx/dt=-y+\sum_{k=2}^{n}p_k(x,y), dy/dt=x+\sum_{k=2}^{n}q_k(x,y)$$

in a singular point $O(0,0)$ where $p_k(x,y), q_k(x,y)$ are homogeneous polynoms of the k-th degree are studied in the paper. In case of existence of algebraic invariant curves and under some other conditions the system can have a center in a singular point $O(0,0)$. It is