ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Т.К. Андреева

Гродненский госуниверситет им Я. Купалы, факультет математики и информатики

Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x''' = f_1(x,x',x'') + \frac{x'}{x^2} f_2(x,x',x'') + \frac{1}{x^2}(f_3(x,x',x''))^{3/2}, \tag{1}$$

где $f_k(x,x',x'') = a_k x x' + b_k x'^2 + c_k x^2 x' + d_k x^4$, a_k, b_k, c_k, d_k, $k = \overline{1,3}$, — постоянные, $a_3 \neq 0$, причем $f_3(x,x',x'')$ не является полным квадратом. Найдем классы уравнений (1) без подвижных критических особых точек.

Для уравнения (1) построим соответствующую систему

$$\begin{cases} a_3 x x'' + b_3 x'^2 + c_3 x^2 x' + d_3 x^4 = \dfrac{4}{a_3^2} w^2 x^2, \\ w' = w^2 + (\alpha x + \dfrac{\beta x'}{x}) w, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{c_3}{a_3} + a_1)$, $\beta = \frac{b_3}{a_3} + \frac{1}{2}(a_2 - 1)$.

Доказаны утверждения:

Лемма 1. *Для однозначности общего решения уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы все решения системы* (2) *были однозначными.*

Лемма 2. *Для однозначности общего решения уравнения* (1) *необходимо, чтобы все решения уравнения*

$$f_3(x,x',x'') = 0 \tag{3}$$

были однозначными.

Теорема 1. *Если* $\frac{2b_3}{a_3} + a_2 = 1$, $\frac{c_3}{a_3} + a_1 \neq 0$, *то уравнение* (1) *имеет подвижные критические точки.*

Теорема 2. *Пусть* $\frac{2b_3}{a_3} + a_2 = 1$, $\frac{c_3}{a_3} = -a_1$. *Тогда для мероморфности решений уравнения* (1) *необходимо и достаточно, чтобы все решения уравнения* (3) *были решениями уравнения* (1) *и было выполнено одно из четырех условий:*

1) $c_3 = d_3 = 0$, $a_3^3 = \frac{4}{n(m+1)m}$, $m, n \in \mathbb{N}$;

2) $a_3^3 = \frac{4}{n(m+1)m}$, $m \neq \frac{1+p}{2p-n}$, $p = \overline{0,n}$, $\frac{c_3}{a_3} = -\alpha$, $\frac{d_3}{a_3} = \frac{n\alpha^2}{(n+2)^2}$, $\alpha = \mathrm{const}$; $m, n \in \mathbb{N}$;

3) $n = \infty$, $d_3 = 0$, $c_3 = 0$, $\frac{4}{a_3^3} = p$, $p \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$;

4) $n = \infty$, $d_3 = 0$, $-\frac{4}{a_3^3} = p$, $p \in \mathbb{N}$.