



УДК 539.3;622.831

М. А. ЖУРАВКОВ, В. А. САВЕНКОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ НАСЫЩЕННОГО ПОРИСТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Приведена процедура построения аналитического решения задачи определения напряженно-деформированного состояния в насыщенной пористой двухфазной среде. При этом учитывалось взаимовлияние составляющих деформируемое тело фаз: напряженное состояние, возникающее в твердом деформируемом скелете, оказывает давление на жидкость/газ; с другой стороны, формирующееся давление в жидкой/газообразной фазе представляет собой источник дополнительных напряжений в твердом деформируемом скелете. Аналитическое решение построено для случая воздействия на насыщенное пористое полупространство динамического периодического давления. На его основании можно разработать численные алгоритмы решения важных прикладных задач геомеханики и строительной механики.

Ключевые слова: насыщенное пористое полупространство; аналитическое выражение для компонент напряженно-деформированного состояния; динамическая задача; связанные гидромеханические; газодинамические и геомеханические процессы; задачи геомеханики.

Procedure the analytical solution creation of a problem of stress-strain state definition in the saturated porous two-phase environment is given. The constructed solution considers interference of phases: the stresses in a rigid deformable skeleton, puts pressure to the liquid/gas and on the other hand the being formed pressure in a liquid/gas phase represents a source of additional stresses in a rigid deformable skeleton. Analytical solutions are constructed for a case of impact on a saturated porous half-space of dynamic periodic pressure. On the basis of the constructed analytical solution it is possible to develop numerical algorithms of geomechanics and construction mechanics important applied problems solutions.

Key words: saturated porous half-space; analytical expression for a component of stress-strain state; dynamic task; connected hydromechanical; gasdynamic and geomechanical processes; problems of geomechanics.

Задачи механики, в которых изучается состояние многофазных сред, входят в число наиболее сложных. Вместе с тем диапазон практического, прикладного использования такого класса задач весьма широк. Так, например, актуальным направлением современной геомеханики является исследование сопряженных геомеханических процессов для определения не только напряженно-деформированного состояния породной толщи как деформируемой твердой среды, но также гидромеханических и газодинамических процессов в массивах горных пород [1].

Это влечет за собой представление породных массивов как многофазных сред, состоящих из твердого деформируемого скелета и жидких или газообразных фракций. При этом следует иметь в виду, что напряженное состояние пористого пласта формируется не только вследствие различных типов механического воздействия, но также под влиянием гидромеханических и газодинамических факторов.

Для адекватного моделирования механических процессов и явлений важным представляется выбор исходной базовой гипотезы поведения рассматриваемой среды. Это обстоятельство в полной мере относится и к случаю моделирования взаимовлияющих гидро- или газогемеханических процессов: принципиальным является вопрос выбора исходной гипотезы, описывающей состояние жидкости/газа в породном массиве. В данной работе поведение породного массива рассматривается как двухфазная среда, где в качестве твердой фракции выступают горные породы, а вторая компонента представляет собой жидкость или газообразную составляющую. Моделируется «упругий режим» поведения двухфазной среды: напряженное состояние, возникающее в твердом деформируемом скелете, оказывает давление на жидкость/газ, вследствие чего связанная жидкость/газ приходит в движение; с другой сто-

роны, формирующееся давление в жидкой/газообразной фазе представляет собой источник дополнительных напряжений в твердом деформируемом скелете [2].

Весьма актуальной прикладной задачей геомеханики, строительной механики является определение воздействия на деформируемую среду нагрузки, изменяющейся со временем [1]. Такой тип нагрузки – действие внешнего давления – рассматривается, например, при изучении состояния плотин, устойчивости массивов горных пород при ведении подземных очистных работ и т. д.

В работе описывается процедура построения аналитического решения задачи воздействия на упругое пористое насыщенное полупространство давления, периодически изменяющегося со временем.

Построение решения модельной задачи

Рассмотрим пористый массив, насыщенный жидкостью или газом с некоторым поровым давлением P_0 , подверженный воздействию внешнего (по отношению к рассматриваемой области) давления, изменяющегося периодически во времени.

Массив горных пород моделируем как пористое упругое полупространство $x_1 \geq 0$, насыщенное жидкостью или газом.

Будем учитывать тот факт, что в случае воздействия на полупространство давления, изменяющегося периодически во времени, компоненты напряженно-деформированного состояния и давление можно разложить в ряд Фурье по времени. Решение строим для давления, изменяющегося во времени по гармоническому закону. В соответствии с этим предполагаем, что на границе x_0 полупространства $x_1 \geq 0$ поддерживается давление, гармонически изменяющееся во времени по закону $P_b = Q_1(x_2) \cos \omega t + Q_2(x_2) \sin \omega t$.

Требуется найти распределение давления и поле напряжений в насыщенном пористом полупространстве. Рассмотрим класс задач, когда массив находится в условиях плоско-деформированного состояния (составляющие тензора деформаций $\varepsilon_{j3} = 0$ ($j=1,2,3$)) [3].

При определении напряженного состояния в насыщенном пористом полупространстве за базовые принимаем уравнения, построенные в [4]:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji}^* + \mu u_{i,jj}^* = \beta P_{,i}^* \quad (i, j = 1, 2), \quad (1)$$

$$P_{,ii}^* = B P^*; \quad B = \frac{a_1}{c_2 k}. \quad (2)$$

Здесь u_i^* – макроперемещения системы скелет – газ/жидкость; P^* – давление газа/жидкости в порах; c_2 – объемная концентрация пор; k – коэффициент фильтрации газа; λ, μ, β, a_1 – эффективные постоянные системы скелет – газ/жидкость, определяемые следующим образом [4]:

$$\lambda = \frac{4c_1^2 K_1 \mu_1}{3c_2 K_1 + 4c_1 \mu_1} - \frac{2}{3} \mu; \quad \mu = \frac{c_1^2 \mu_1 [9(c_1 K_1 + c_2 K_2) + 8c_1 \mu_1]}{3(2 + c_1)(c_1 K_1 + c_2 K_2) + 4(2 + c_2)c_1 \mu_1},$$

$$\beta = \frac{c_2(3K_1 + 4c_1 \mu_1)}{3c_2 K_1 + 4c_1 \mu_1}; \quad a_1 = \frac{3(c_1 K_2 + c_2 K_1) + 4c_1 \mu_1}{K_2(3c_2 K_1 + 4c_1 \mu_1)}, \quad (c_1 + c_2 = 1).$$

Здесь K_1, K_2 – модули объемной деформации твердой и газообразной фаз; μ_1 – модуль сдвига твердой фазы.

Напряжения в твердой фазе $\sigma_{ij}^{(1)}$ связаны с макронапряжениями и поровым давлением такой зависимостью [4]:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{1}{c_1} \sigma_{ij}^* + \frac{c_2}{c_1} P^* \delta_{ij}. \quad (3)$$

Задачу решаем в два этапа. Вначале рассматривается уравнение фильтрации (2) с заданными граничными условиями. Затем подставляем уже известное распределение давления в правую часть уравнений (1) и решаем эту систему так же, как для стационарной задачи, трактуя время t как параметр.

При периодическом изменении давления, действующего на границе полупространства, влияние начальных условий не сказывается на распределении решения в достаточно удаленный момент времени наблюдения. Граничное условие для давления газа в порах записываем следующим образом:

$$P^*|_{x_1=0} = P_b + P_0. \quad (4)$$

Давление газа в порах можно представить в таком виде:

$$P^* = P_0 + P, \quad (5)$$

где P – дополнительное давление, вызванное возмущением на границе.

Решение задачи (2), (4), (5) ищем в виде

$$P^* = P_1(x_1, x_2) \cos \omega t + P_2(x_1, x_2) \sin \omega t + P_0. \quad (6)$$

Подставляя в уравнение фильтрации выражение (6), получим систему двух уравнений для определения дополнительного давления:

$$\Delta P_1 - 2n^2 P_2 = 0, \quad \Delta P_2 + 2n^2 P_1 = 0, \quad 2n^2 = B\omega, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2. \quad (7)$$

Исключая из этих уравнений сначала P_1 , а потом P_2 , находим

$$\Delta^2 P_1 + 4n^4 P_1 = 0, \quad \Delta^2 P_2 + 4n^4 P_2 = 0. \quad (8)$$

Следует отметить, что достаточно решить одно из этих уравнений. Если, например, мы знаем P_1 , то P_2 определяем из первого уравнения (7).

Рассмотрим частный случай, когда $P_b = P_0 \cos \omega t$, ($Q_1 = P_0$, $Q_2 = 0$). Тогда уравнения (8) примут вид

$$\frac{d^4 P_1}{dx_1^4} + 4n^4 P_1 = 0, \quad \frac{d^4 P_2}{dx_1^4} + 4n^4 P_2 = 0. \quad (9)$$

Оба уравнения (9) следует дополнить двумя граничными условиями:

$$P_1(0) = P_0, \quad \frac{d^2 P_1}{dx_1^2} = 0, \quad P_2(0) = 0, \quad \frac{d^2 P_2}{dx_1^2} = -2n^2 P_0.$$

Граничные условия, содержащие вторую производную, получены из уравнений (7), записанных для границы $x_1 = 0$.

Решением уравнений (9) являются функции

$$P_1 = P_0 e^{-nx_1} \cos nx_1, \quad P_2 = P_0 e^{-nx_1} \sin nx_1.$$

Тогда из формулы (6) получаем следующее распределение давления:

$$P = P_0 e^{-nx_1} \cos(nx_1 - \omega t).$$

Зная распределение давления, можно приступить к определению поля перемещений и поля напряжений.

Перемещения u_i^* и напряжения σ_{ij}^* в массиве можно представить в виде [3]:

$$u_i^* = u_i^0 + u_i; \quad \sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}.$$

Здесь σ_{ij}, u_i – дополнительное напряженно-деформированное состояние, вызванное наличием внешнего возмущения на границе; σ_{ij}^0, u_i^0 – известное начальное напряженно-деформированное состояние [3].

Система базовых уравнений для определения «возмущенного» напряженно-деформированного состояния согласно (1) имеет вид

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = \beta P_i. \quad (10)$$

Решение (10) представляем в виде суммы двух решений: частного решения $\bar{u}_i = \Phi_i$ системы неоднородных уравнений (10) и общего решения $\bar{u}_i$ соответствующих однородных уравнений:

$$(\lambda + \mu)\bar{u}_{j,ji} + \mu\bar{u}_{i,jj} = 0. \quad (11)$$

Подставляя $\bar{u}_i = \Phi_i$ в систему (10), получаем

$$((\lambda + 2\mu)\Phi_{,ii} - \beta P)_i = 0.$$

Интегрируя эти уравнения по x_i , для определения потенциала Φ имеем следующее уравнение:

$$\Delta \Phi = mP, \quad (12)$$

где $m = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}$.

Знание функции Φ позволяет определить функции $\bar{\sigma}_{ij}, \bar{u}_i, \bar{\varepsilon}_{ij}$. Последовательно получаем

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \Phi_{,i}, \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \Phi_{,ij}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = 2\mu(\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\Phi_{,kk}), \quad i, j, k = 1, 2, \\ \bar{\sigma}_{33} &= -2\mu\Phi_{,kk} = -2\mu mP. \end{aligned} \quad (13)$$

Определенные таким образом напряжения не всегда удовлетворяют граничным условиям конкретной задачи. Поэтому к полю $\bar{u}_i$ следует добавить поле u_i , удовлетворяющее системе уравнений (11).

Если принять, что

$$\Phi = \Phi_1 \cos \omega t + \Phi_2 \sin \omega t, \quad (14)$$

то уравнение (12) разбивается на два:

$$\Delta \Phi_1 = mP_1 \quad \text{и} \quad \Delta \Phi_2 = mP_2. \quad (15)$$

Частные решения уравнений (15) находятся достаточно легко, и, сравнивая их с уравнениями (7), получаем

$$\Phi_1 = -\frac{m}{2n^2} P_2, \quad \Phi_2 = \frac{m}{2n^2} P_1.$$

Складывая функции Φ_1 и Φ_2 по формуле (14), определяем потенциал перемещения

$$\Phi = -\frac{mP_0}{2n^2} e^{-nx_1} \sin(nx_1 - \omega t).$$

Напряжения, связанные с функцией Φ , определяем согласно формулам (13)

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{11}} &= 0, \quad \overline{\sigma_{22}} = \overline{\sigma_{33}} = -2\mu\partial_1^2\Phi, \quad \overline{\sigma_{12}} = 0, \\ \overline{\sigma_{22}} = \overline{\sigma_{33}} &= -2\mu m P_0 e^{-nx_1} \cos(nx_1 - \omega t). \end{aligned}$$

Это решение удовлетворяет граничному условию $\overline{\sigma_{12}} = 0$ при $x_1 = 0$. Однако напряжение $\overline{\sigma_{11}}$, которое при $x_1 = 0$ должно принимать значение $-P_b$, обращается в нуль. Следовательно, на полученное решение следует наложить решение уравнений (11), принимающее при $x_1 = 0$ значения $\overline{\sigma_{11}} = -P_b$ и $\overline{\sigma_{12}} = 0$.

Согласно [5] общее решение однородных уравнений, соответствующих уравнениям (11), имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma_{11}}} &= -\frac{2P_b x_1^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{[(x_2 - \xi)^2 + x_1^2]^2}, \\ \overline{\overline{\sigma_{12}}} &= -\frac{2P_b x_1^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_2 - \xi)d\xi}{[(x_2 - \xi)^2 + x_1^2]^2}, \\ \overline{\overline{\sigma_{22}}} &= -\frac{2P_b x_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_2 - \xi)^2 d\xi}{[(x_2 - \xi)^2 + x_1^2]^2}. \end{aligned}$$

Для макронапряжений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= \sigma_{ij}^0 + \overline{\overline{\sigma_{ij}}} + \sigma_{ij}, \\ \sigma_{11}^* &= \sigma_{11}^0 - \frac{2P_0 x_1^3 \cos \omega t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{[(x_2 - \xi)^2 + x_1^2]^2}, \\ \sigma_{12}^* &= \sigma_{12}^0 - \frac{2P_0 x_1^2 \cos \omega t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_2 - \xi)d\xi}{[(x_2 - \xi)^2 + x_1^2]^2}, \\ \sigma_{22}^* &= \sigma_{22}^0 - 2\mu m P_0 e^{-nx_1} \cos(nx_1 - \omega t) - \frac{2P_0 x_1 \cos \omega t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_2 - \xi)^2 d\xi}{[(x_2 - \xi)^2 + x_1^2]^2}. \end{aligned}$$

Здесь σ_{ij}^0 – известное начальное напряженное состояние массива.

Напряжения в твердой фазе определяются по формулам (3), а полное давление в массиве находится по формуле

$$P^* = P_0 + P_0 e^{-nx_1} \cos(nx_1 - \omega t).$$

В соответствии с построенным решением наибольшие по величине напряжения имеют место на границе полупространства. С удалением в глубь полупространства эти напряжения затухают.

* * *

В статье построено аналитическое решение для определения напряженно-деформированного состояния в насыщенном породном массиве, рассматриваемом как двухфазная среда, где в качестве твердой фракции выступают горные породы, а вторая компонента представляет собой либо жидкую фракцию, либо газообразную составляющую. В построенном решении учитывается взаимовлияние составляющих деформируемое тело двух фаз: напряженное состояние, возникающее в твердом деформируемом скелете, оказывает давление на жидкость/газ; с другой стороны, формирующееся давление в жидкой/газообразной фазе представляет собой источник дополнительных напряжений в твердом деформируемом скелете.

Аналитическое решение построено для случая воздействия на область массива динамического периодического давления.

На основании построенного аналитического решения можно разработать численные алгоритмы решения важных прикладных задач геомеханики и строительной механики.

1. Журавков М. А. Актуальные научные проблемы современной геомеханики для условий Республики Беларусь // Механика машин, механизмов и материалов. 2007. № 1. С. 94–99.
2. Zhuravkov M. A., Kononov O. L., Krupoderov A. V., Kushunin A. A. Modelling of connected geomechanical, hydromechanical and gasdynamic processes for potash minerals deposits // Mine Planning and Equipment Selection. MPES 2009. Pub. by Balkema/Rotterdam/ Brookfield. 2009. P. 1150–1159.
3. Журавков М. А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов). Минск, 2002.
4. Хорошун Л. П. К теории насыщенных пористых сред // Прикл. механика. 1976. № 12 б. С. 35–41.
5. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.; Л., 1963.

Поступила в редакцию 16.04.13.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор, первый проректор БГУ, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики.

Валерий Алексеевич Савенков – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

УДК 517.9

Т. С. АВТУШКО, Н. В. ЛАЗАКОВИЧ, А. Ю. РУСЕЦКИЙ

ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

Рассматривается задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} Y''(t) + a'(t)Y'(t) + \sigma'(t)Y(t) = 0, \\ Y(0) = c_1, \\ Y'(0) = c_2 \end{cases}$$

в алгебре мнемифункций. Здесь $t \in T = [0, b]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma, a: T \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации, σ', a' – их обобщенные производные. Исследуются вопросы существования и единственности решений интегральных уравнений, к которым сходятся ассоциированные решения соответствующего исходной задаче уравнения в дифференциалах в алгебре мнемифункций. Вводятся определения ассоциированных фундаментальных матриц, изучаются их свойства. Находятся ассоциированные решения задачи через ассоциированные фундаментальные матрицы. Рассматривается сопряженная задача. Выписывается связь ассоциированных фундаментальных матриц исходной задачи и сопряженной.

Ключевые слова: линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка; алгебра мнемифункций; ассоциированные решения; ассоциированные фундаментальные матрицы; сопряженная задача; связь ассоциированных фундаментальных матриц исходной задачи и сопряженной.

Cauchy problem for the homogeneous linear differential equation of second order

$$\begin{cases} Y''(t) + a'(t)Y'(t) + \sigma'(t)Y(t) = 0, \\ Y(0) = c_1, \\ Y'(0) = c_2 \end{cases}$$

in algebra mnemofunctions is studied. Here $t \in T = [0, b]$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma, a: T \rightarrow \mathbb{R}$ – right-continuous function of bounded variation, σ', a' – their generalized derivatives. Questions of existence of the solutions of integral equations which associated solutions corresponding to the initial problem of the equation in differentials in the algebra mnemofunctions converge to and their uniqueness are researched. Definitions of associated fundamental matrices are introduced, their properties are studied. Associated solutions of the problem through corresponding associated fundamental matrices are found. We consider the adjoint problem. The bond between the associated fundamental matrices of the original problem and the conjugate is issued.

Key words: the homogeneous linear differential equation of second order; the algebra mnemofunctions; associated solutions; associated fundamental matrices; the adjoint problem; the bond between associated fundamental matrix of the original problem and the conjugate.

В работе рассматривается задача Коши для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} Y''(t) + a'(t)Y'(t) + \sigma'(t)Y(t) = 0, \\ Y(0) = c_1, \\ Y'(0) = c_2, \end{cases} \quad (1)$$

которая в матричном виде может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} X'(t) = L'(t)X(t), \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (2)$$