

УДК 517.544 + 51-72

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ВЕКТОРНО-МАТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОВОДИМОСТИ 2D КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

М. В. ДУБАТОВСКАЯ, С. В. РОГОЗИН

It is considered steady state problem of heat conduction in 2D composite materials with symmetric inclusion. The problem is reduced to a vector-matrix boundary value problem which is solved analytically by using a combination of analytic continuation method and method of functional equations.

1. Введение. Постановка задачи. В работе рассматривается задача о проводимости композиционных материалов с симметричными включениями. Потенциальный установившийся тепловой поток пересекает цилиндрический композиционный материал с ограниченным сечением ортогонально оси цилиндра. Цилиндр разделен на шесть одинаковых цилиндрических секторов, каждый из которых содержит цилиндрическое круговое включение. Включения одинаковы и симметричным образом расположены в основном цилиндре (матрице). Рассматриваемая задача моделируется задачей о проводимости двумерной структуры с симметрично расположенными включениями. Проводимости λ_k компонент этой структуры (композиционного материала) постоянны и симметричным образом распределены (см. Рис. 1). Предполагается непрерывность температуры и теплового потока при пересечении линий раздела сред.

Краевые задачи, описывающие распределение температуры в таком композиционном материале, сводятся к векторно-матричной краевой задаче на линиях раздела сред (см. [1], [2], [3], [5]). Структура задачи позволяет свести задачу к векторно-матричной краевой задаче на семействе окружностей. Последняя решается методом функциональных уравнений, описанным в [5] и примененным к решению векторно-матричных задач для многосвязных круговых областей в [6]. Подобный подход был впервые реализован в работе [3]. Для рассматриваемой структуры исследование разрешимости задачи дано в статьях [1], [2].

Математическая постановка рассматриваемой задачи такова (см. [4]): пусть на единичной окружности \mathbb{T} задана вещественно-значная кусочно-непрерывная по Гельдеру функция $f \in \mathcal{C}^{1,\mu} \left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k \right)$, $z_k = e^{\frac{2\pi(k-1)}{6}i}$, $k = 1, \dots, 6$, ограниченная в окрестности каждой точки z_k и удовлетворяющая условиям симметрии $f(-t) = f(t)$, $t \in \left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k \right)$. Требуется найти (кусочно) гармоническую функцию (температуру) $u \in h_{\mathcal{A}}^1 \left(\bigcup_{k=1}^6 \mathbb{D}_k \right)$ (т.е. гармоническую в каждой однородной части структуры, кусочно непрерывно-дифференцируемую вплоть до “внутренней

Keywords: *composite materials, vector-matrix boundary-value problem, heat conduction, symmetric composite*

2000 Mathematics Subject Classification: 30E25, 74A40

© М. В. Дубатовская, С. В. Рогозин, 2003.

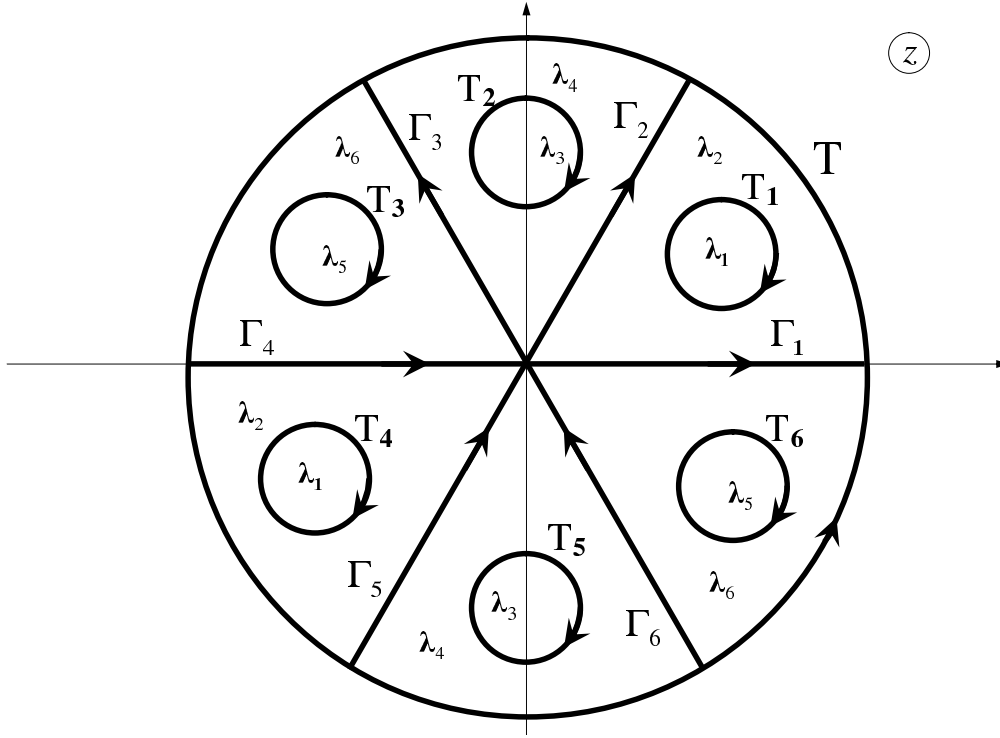


Рис. 1: Сечение композиционного материала с симметричными включениями.

части” границы $\left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k\right) \bigcup_{k=1}^6 \Gamma_k \bigcup_{k=1}^6 \mathbb{T}_k$, ограниченную в окрестности точек $z = 0$ and $z_k, k = 1, \dots, 6$, удовлетворяющую условию идеального контакта на интервалах Γ_k и окружностях \mathbb{T}_k , в предположении что распределение температуры на единичной окружности определяется заданной функцией f :

$$\begin{cases} u^+(t) = u^-(t), & \lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_6 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \Gamma_1, \\ u^+(t) = u^-(t), & \lambda_4 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_2 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \Gamma_2, \\ u^+(t) = u^-(t), & \lambda_6 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_4 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \Gamma_3, \\ u^+(t) = u^-(t), & \lambda_6 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_2 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \Gamma_4, \\ u^+(t) = u^-(t), & \lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_4 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \Gamma_5, \\ u^+(t) = u^-(t), & \lambda_4 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_6 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \Gamma_6, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u^+(t) = u^-(t), & \lambda_2 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_1 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \mathbb{T}_k, & k = 1, 4, \\ u^+(t) = u^-(t), & \lambda_4 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_3 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \mathbb{T}_k, & k = 2, 5, \\ u^+(t) = u^-(t), & \lambda_6 \frac{\partial u^+}{\partial n}(t) = \lambda_5 \frac{\partial u^-}{\partial n}(t), & t \in \mathbb{T}_k, & k = 3, 6, \end{cases} \quad (2)$$

$$u(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{T} \setminus \left\{ \bigcup_{k=1}^6 z_k \right\}. \quad (3)$$

Граничные значения берутся в соответствии с фиксированной ориентацией границы (см. Рис. 1) – “плюсовые” - слева по обходу, “минусовые” - справа по обходу.

Введем в каждой из под-областей неизвестные комплексные потенциалы $h(z)$:

$$u(z) := \operatorname{Re} h(z), \quad z \in \bigcup_{k=1}^6 \left(\Omega_k \cup \mathbb{D}_k \right), \quad (4)$$

где

$$\Omega_k := \{z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_k : 0 < |z| < 1, |z - a_k| > r, 2\pi(k-1)/6 < \arg z < 2\pi k/6\}.$$

В терминах комплексных потенциалов краевые условия (1)-(3) могут быть переписаны в следующей форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} h^+(t) = \frac{\lambda_2 + \lambda_6}{2\lambda_2} h^-(t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_6}{2\lambda_2} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \Gamma_1, \\ h^+(t) = \frac{\lambda_4 + \lambda_2}{2\lambda_4} h^-(t) + \frac{\lambda_4 - \lambda_2}{2\lambda_4} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \Gamma_2, \\ h^+(t) = \frac{\lambda_6 + \lambda_4}{2\lambda_6} h^-(t) + \frac{\lambda_6 - \lambda_4}{2\lambda_6} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \Gamma_3, \\ h^+(t) = \frac{\lambda_6 + \lambda_2}{2\lambda_6} h^-(t) + \frac{\lambda_6 - \lambda_2}{2\lambda_6} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \Gamma_4, \\ h^+(t) = \frac{\lambda_2 + \lambda_4}{2\lambda_2} h^-(t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{2\lambda_2} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \Gamma_5, \\ h^+(t) = \frac{\lambda_4 + \lambda_6}{2\lambda_4} h^-(t) + \frac{\lambda_4 - \lambda_6}{2\lambda_4} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \Gamma_6, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h^+(t) = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2\lambda_2} h^-(t) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_2} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 1, 4, \\ h^+(t) = \frac{\lambda_4 + \lambda_3}{2\lambda_4} h^-(t) + \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{2\lambda_4} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 2, 5, \\ h^+(t) = \frac{\lambda_6 + \lambda_5}{2\lambda_6} h^-(t) + \frac{\lambda_6 - \lambda_5}{2\lambda_6} \overline{h^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 3, 6, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} h(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{T} \setminus \left\{ \bigcup_{k=1}^6 z_k \right\}. \quad (7)$$

2. Сведение задачи о распределении температуры к векторно-матричной краевой задаче. Скалярная задача (5)-(7) сводится к векторно-матричной краевой задаче \mathbb{R} -линейного сопряжения в области $\mathbb{D} := \mathbb{U} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^6 \overline{\mathbb{D}_k} \right)$. Введем (см., [2, с. 59]) неизвестные вектор-функции

$$\begin{aligned} \Phi(z) &:= (\Phi_1(z), \dots, \Phi_6(z))^T = \\ &= \left(h(z), \overline{h(\bar{z}e^{i2\pi/3})}, h(ze^{i2\pi/3}), \overline{h(\bar{z}e^{i4\pi/3})}, h(ze^{i4\pi/3}), \overline{h(\bar{z})} \right)^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Компоненты вектор-функции Φ удовлетворяют следующим условиям симметрии

$$\Phi_1(z) \equiv \overline{\Phi_2(\bar{z}e^{i2\pi/3})} \equiv \Phi_3(ze^{i4\pi/3}) \equiv \overline{\Phi_4(\bar{z}e^{i4\pi/3})} \equiv \Phi_5(ze^{i2\pi/3}) \equiv \overline{\Phi_6(\bar{z})}. \quad (9)$$

Отождествляя соответствующие точки на интервалах Γ_k , $k = 1, \dots, 6$, и переходя к комплексному сопряжению во всех соотношениях (5), приходим к следующим векторно-матричным краевым условиям на каждом из интервалов Γ_k , $k = 1, \dots, 6$:

$$\Phi^+(t) = G_k(t) \Phi^-(t), \quad t \in \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (10)$$

Краевые условия (2), (3) также переписываются в векторно-матричной форме

$$\Phi^+(t) = H_k \Phi^- + S_k \overline{\Phi^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (11)$$

$$\operatorname{Re} \Phi(t) = \mathbf{q}(t), \quad t \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k. \quad (12)$$

Постоянные матрицы G_k , $k = 1, \dots, 6$, имеют специальную структуру (являются двух-диагональными) (см., [2, с. 60-61]), а матрицы H_k , S_k , $k = 1, \dots, 6$, диагональны и связаны между собой соотношениями: $H_4 = H_1$, $S_4 = S_1$, $H_5 = H_2$, $S_5 = S_2$, $H_6 = H_3$, $S_6 = S_3$. Наконец,

$$\mathbf{q} = \left(f(t), f(\bar{t}e^{i2\pi/3}), f(te^{i2\pi/3}), f(\bar{t}e^{i4\pi/3}), f(te^{i4\pi/3}), f(\bar{t}) \right)^T, \quad t \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k. \quad (13)$$

3. Сведение к векторно-матричной краевой задаче для многосвязной круговой области. Введем новую неизвестную кусочно-аналитическую вектор-функцию

$$\mathbf{F}(z) \equiv G \cdot \Phi(z) \equiv \begin{cases} \Phi(z), & z \in \Omega_1 \cup \mathbb{D}_1, \\ G_2^{-1} \Phi(z), & z \in \Omega_2 \cup \mathbb{D}_2, \\ G_2^{-1} G_3^{-1} \Phi(z), & z \in \Omega_3 \cup \mathbb{D}_3, \\ G_2^{-1} G_3^{-1} G_4 \Phi(z), & z \in \Omega_4 \cup \mathbb{D}_4, \\ G_2^{-1} G_3^{-1} G_4 G_5 \Phi(z), & z \in \Omega_5 \cup \mathbb{D}_5, \\ G_2^{-1} G_3^{-1} G_4 G_5 G_6 \Phi(z), & z \in \Omega_6 \cup \mathbb{D}_6. \end{cases} \quad (14)$$

Соотношения (14) определяют кусочно-аналитическую вектор-функцию:

$$\mathbf{F}(z), \quad z \in \bigcup_{k=1}^6 \Omega_k, \quad (15)$$

и шесть аналитических функций

$$\mathbf{F}_k(z), \quad z \in \mathbb{D}_k, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (16)$$

Обозначим $\mathbf{F}^+(t), \mathbf{F}^-(t)$ граничные значения функции $\mathbf{F}(z)$ на сторонах интервалов Γ_k , соответствующие принятой ориентации. Обозначим также $\mathbf{F}_k^-(t)$ граничные значения функций $\mathbf{F}_k(z)$ на окружностях \mathbb{T}_k .

На интервалах Γ_k , $k = 2, \dots, 6$, выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{F}^+(t) = \mathbf{F}^-(t), \quad t \in \Gamma_k, \quad k = 2, \dots, 6, \quad (17)$$

а на Γ_1 подобное соотношение имеет вид

$$\mathbf{F}^+(t) = G_1 G_6^{-1} G_5^{-1} G_4^{-1} G_3 G_2 \mathbf{F}^-(t), \quad t \in \Gamma_1. \quad (18)$$

Структура матриц G_k такова, что (см., [3, с. 64])

$$G_4 = G_1^{-1}, \quad G_5 = G_2^{-1}, \quad G_6 = G_3^{-1}.$$

Следовательно, векторно-матричное краевое условие (18) на Γ_1 может быть переписано в виде

$$\mathbf{F}^+(t) = G_1 G_3 G_2 G_1 G_3 G_2 \mathbf{F}^-(t), \quad t \in \Gamma_1. \quad (19)$$

Непосредственно устанавливается (см. соответствующие вычисления в [1]), что матричный коэффициент этого краевого условия представляет собой диагональную матрицу

$$K := G_1 G_3 G_2 G_1 G_3 G_2 = \text{diag} \left\{ \left[\frac{8\lambda_2 \lambda_4 \lambda_6}{(\lambda_2 + \lambda_4)(\lambda_2 + \lambda_6)(\lambda_4 + \lambda_6)} \right]^2 \right\} =: \text{diag} \{ \varrho^2 \}.$$

Следует отметить, что если не все коэффициенты проводимости $\lambda_j \neq 0$, $j = 2, 4, 6$, равны между собой, то

$$0 < \varrho < 1.$$

Используя обозначения для новых неизвестных вектор-функций (15)-(16), а также их связь (14) с вектор-функциями $\Phi(z)$, перепишем краевые условия на окружностях \mathbb{T}_k в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^+(t) &= H_1 \mathbf{F}_1^-(t) + S_1 \overline{\mathbf{F}_1^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_1, \\ \mathbf{F}^+(t) &= G_2^{-1} H_2 G_2 \mathbf{F}_2^-(t) + G_2^{-1} S_2 G_2 \overline{\mathbf{F}_2^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_2, \\ \mathbf{F}^+(t) &= G_2^{-1} G_3^{-1} H_3 G_3 G_2 \mathbf{F}_3^-(t) + G_2^{-1} G_3^{-1} S_3 G_3 G_2 \overline{\mathbf{F}_3^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_3, \\ \mathbf{F}^+(t) &= G_2^{-1} G_3^{-1} G_1^{-1} H_4 G_1 G_3 G_2 \mathbf{F}_4^-(t) + \\ &\quad + G_2^{-1} G_3^{-1} G_1^{-1} S_4 G_1 G_3 G_2 \overline{\mathbf{F}_4^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_4, \\ \mathbf{F}^+(t) &= G_2^{-1} G_3^{-1} G_1^{-1} G_2^{-1} H_5 G_2 G_1 G_3 G_2 \mathbf{F}_5^-(t) + \\ &\quad + G_2^{-1} G_3^{-1} G_1^{-1} G_2^{-1} S_5 G_2 G_1 G_3 G_2 \overline{\mathbf{F}_5^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_5, \\ \mathbf{F}^+(t) &= G_2^{-1} G_3^{-1} G_1^{-1} G_2^{-1} G_3^{-1} H_6 G_3 G_2 G_1 G_3 G_2 \mathbf{F}_6^-(t) + \\ &\quad + G_2^{-1} G_3^{-1} G_1^{-1} G_2^{-1} G_3^{-1} S_6 G_3 G_2 G_1 G_3 G_2 \overline{\mathbf{F}_6^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_6. \end{aligned} \quad (20)$$

Краевые условия (20) имеют один и тот же тип, а именно

$$\mathbf{F}^+(t) = A_k^{-1} H_k A_k \mathbf{F}_k^-(t) + A_k^{-1} S_k A_k \overline{\mathbf{F}_k^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (21)$$

где A_k – постоянные невырожденные матрицы. Более того, соотношения

$$G_1 G_3 G_2 = \text{diag}\{\varrho\}$$

и свойства матриц H_k и S_k позволяют упростить краевые условия (20):

$$\mathbf{F}^+(t) = H_1 \mathbf{F}_k^-(t) + S_1 \overline{\mathbf{F}_k^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 1, 4, \quad (22)$$

$$\mathbf{F}^+(t) = G_2^{-1} H_2 G_2 \mathbf{F}_k^-(t) + G_2^{-1} S_2 G_2 \overline{\mathbf{F}_k^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 2, 5, \quad (23)$$

$$\mathbf{F}^+(t) = G_1 H_1 G_1^{-1} \mathbf{F}_k^-(t) + G_1 S_1 G_1^{-1} \overline{\mathbf{F}_k^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 3, 6. \quad (24)$$

4. Решение задачи. Общее решение задачи (19) в классе функций ограниченных в окрестности концов интервала Γ_1 имеет вид

$$X_0(z) = C \left(\frac{z-1}{z} \right)^{\frac{\log \varrho}{\pi i}}. \quad (25)$$

Различные ветви многозначной функции $X_0(z)$ отличаются на постоянный множитель, поэтому в силу произвольности постоянной C можно считать, что в (25) зафиксирована ветвь этой многозначной функции, соответствующая главной ветви $\arg \frac{z-1}{z}$.

Преобразуем сначала краевое условие (12). Это условие может быть переписано в виде:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} = 2\mathbf{q}(t), \quad t \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k. \quad (26)$$

Пользуясь условием симметрии на единичной окружности $t = 1/\bar{t}$, $\forall t \in \mathbb{T}$, введем вспомогательную вектор-функцию $\Phi^-(z) = \overline{\Phi(1/\bar{z})}$, $|z| > 1$, аналитическую во внешности единичного круга. Воспользовавшись представлениями (14) перепишем краевое условие (26) в терминах вектор-функций $\mathbf{F}^-(z) \equiv \Phi^-(z)$, аналитической во внешности единичного круга, и $\mathbf{F}(z)$, аналитической в многосвязной области $\mathbb{U} \setminus \left(\overline{\Gamma_1} \bigcup_{k=1}^6 \overline{\mathbb{D}_k} \right)$, где кусочно-постоянная матрица G определена в равенствах (14).

$$\mathbf{F}(t) + G \cdot \mathbf{F}^-(t) = 2G \cdot \mathbf{q}(t), \quad t \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k. \quad (27)$$

Введем далее новые неизвестные вектор-функции, воспользовавшись решением задачи (19),

$$\Psi^+(z) = \frac{\mathbf{F}(z)}{X_0(z)}, \quad z \in \mathbb{U} \setminus \bigcup_{k=1}^6 cl \mathbb{D}_k.$$

Заметим, что функция $\Psi^+(z)$ аналитична всюду в многосвязной круговой области, получающейся выбрасыванием из единичного круга замкнутых кругов $cl \mathbb{D}_k$, $k = 1, \dots, 6$. Поскольку выбранная ветвь многозначной функции $X_0(z)$ аналитична во внешности единичного круга, то представляется удобным ввести новую вектор-функцию $\Psi^-(z) = \frac{\mathbf{F}^-(z)}{X_0(z)}$. Тогда в терминах этих функций краевое условие (12) имеет вид

$$\Psi^+(t) = -G \cdot \Psi^-(t) + 2G \cdot \frac{\mathbf{q}(t)}{X_0(t)}, \quad t \in \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k. \quad (28)$$

Перепишем теперь краевые условия (22), (23), (24) в терминах введенных выше вектор-функций, а также вектор-функций

$$\Psi_k^-(z) = \frac{\mathbf{F}_k^-(z)}{X_0(z)}, \quad z \in \mathbb{D}_k, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (29)$$

где $\mathbf{F}_k^-(z)$ определены соотношениями (14).

$$\Psi^+(t) = H_1 \Psi_k^-(t) + S_1 \cdot \frac{\overline{X_0(t)}}{X_0(t)} \cdot \overline{\Psi_k^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 1, 4, \quad (30)$$

$$\Psi^+(t) = G_2^{-1} H_2 G_2 \Psi_k^-(t) + G_2^{-1} S_2 G_2 \cdot \frac{\overline{X_0(t)}}{X_0(t)} \cdot \overline{\Psi_k^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 2, 5, \quad (31)$$

$$\Psi^+(t) = G_1 H_1 G_1^{-1} \Psi_k^-(t) + G_1 S_1 G_1^{-1} \cdot \frac{\overline{X_0(t)}}{X_0(t)} \cdot \overline{\Psi_k^-(t)}, \quad t \in \mathbb{T}_k, \quad k = 3, 6. \quad (32)$$

Заметим, что краевые условия (28), (30), (31), (32) имеют один и тот же тип. Вид коэффициентов этих задач позволяет сформулировать основной результат работы, который вытекает из теоремы о разрешимости краевой задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения для многосвязной круговой области (см., [5], [6]).

Теорема. Пусть постоянные матрицы G_k , H_k , S_k имеют вид, определенный в [2, с. 60-61], вектор $\mathbf{q}(t)$ определен равенством (13), где функция $f \in \mathcal{C}^{1,\mu} \left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k \right)$, $z_k = e^{\frac{2\pi(k-1)}{6}i}$, $k = 1, \dots, 6$, ограничена в окрестности каждой точки z_k и удовлетворяет условиям симметрии $f(-t) = f(t)$, $t \in \left(\mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^6 z_k \right)$.

Тогда векторно-матричная краевая (28), (30), (31), (32) для многосвязной круговой области имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Замечание. Подробное доказательство теоремы, алгоритм построения решения, а также вычисление и анализ эффективных характеристик рассматриваемого ограниченного симметричного композиционного материала будут даны в последующих работах.

Литература

1. Dubatovskaya M.V., Rogosin S.V. Heat Conduction of 2D Composite Materials with Symmetric Inclusions: a Model and Reduction to a Vector-Matrix Problem // Material Science Forum. 2007. Vol. 553. P. 136-142.
2. Dubatovskaya M.V., Rogosin S.V. On Heat Conduction in Bounded 2D Composite Materials with Symmetric Inclusions // In: Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2006 (A.A.Kilbas, S.V.Rogosin Eds.). Cottenham, UK: Cambridge Scientific Publishers. - 2008. - P. 55-68.
3. Жоровина Т.Н., Митюшев В.В. Смешанная краевая задача для многосвязной области // Вестник БГУ, сер. 1. 1996. No. 1. Депонирована в ВИНТИ.
4. Mityushev V.V., Pesetskaya E.V., Rogosin S.V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media. In: Thermal Properties of Cellular and Porous Materials. Amsterdam: WILEY-VCH. - 2008. - P. 124-167.
5. Mityushev V.V., Rogosin S.V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions. Theory and Applications, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 108. Boca Raton - London: Chapman & Hall / CRC, 1999.
6. Mityushev V.V., Rogosin S.V. On Riemann-Hilbert problem with a piece-wise constant matrix // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen (ZAA). - 2008. - Vol. 27, No. 1. - P. 53-66.