О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ ФУКСА (ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА) ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

И. В. Мататова[1], **В. А. Прокашева**[2]

[1] Белорусский государственный технологический университет,
кафедра высшей математики, Минск, Беларусь

[2] Белгосуниверситет, кафедра общей математики и информатики,
пр-т Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

В докладе рассматривается автономная система дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2, \tag{2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + \gamma_4 x^2 + \gamma_5 xy + \gamma_6 xz + \gamma_7 y^2 + \gamma_8 yz + z^2, \tag{3}$$

где $t \in \mathbb{C}$, $x, y, z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\alpha_0, \ldots, \gamma_8$ — комплексные постоянные. Из уравнений (1) и (2) получим нелинейное ДУ второго порядка

$$x'' = \frac{\alpha_4 + \beta_5}{\alpha_2 + \alpha_4 x}(x')^2 + F(x)x' + G(x), \tag{4}$$

где $F(x), G(x)$ — рациональные функции относительно x. Далее сравниваем ДУ (4) с каноническими уравнениями Пенлеве — Гамбье. При выполнении условий

$$\alpha_1 = q, \alpha_2 \neq 0,\ \alpha_3 = -1,\ \alpha_4 = 0,$$

$$\beta_0 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = -1,\ \beta_5 = 0,\ \alpha_0 + \alpha_2\beta_1 = 0$$

ДУ (4) совпадает с уравнением $x'' = -3xx' - x^3 + q(x' + x^2)$, которое интегрируется в эллиптических функциях. Разложение в окрестности подвижного полюса $t = C_1$ для последнего уравнения имеет вид

$$x = \frac{2}{t - C_1} + \frac{q}{3} + \frac{q^2}{18}(t - C_1) + \ldots,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Подставляя соответствующие ряды Лорана (для x и y) в ДУ (3), получим уравнение Риккати $z' = A(t, C_1, C_2) + B(t, C_1, C_2)z + z^2$. Далее с помощью замены $z = -\xi'/\xi$ переходим от ДУ Риккати к линейному уравнению

$$\xi'' + P(t, C_1, C_2)\xi' + Q(t, C_1, C_2)\xi = 0. \tag{5}$$

Применяя к ДУ (5) теорему Фукса, получаем достаточные условия того, что исходная система (1)–(3) принадлежит классу P (т. е., что ее решения имеют в $\mathbb{C}$ подвижные особенности не сложнее полярных).