ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ЭЙЛЕРА

В.И.Булатов, Ю.Б.Сыроид

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

Syroid@bsu.by

В курсе математического анализа при изучении эйлеровых интегралов важную роль играет интеграл Эйлера

$$E(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \int\limits_0^1 \frac{t^{\alpha-1}+t^{-\alpha}}{1+t}dt,$$

для которого при $\alpha \in]0;1[$ справедлива формула

$$E(\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \tag{1}$$

Предлагается следующее обоснование формулы (1). Во-первых, непосредственным вычислением показывается, что

$$\pi - E(\alpha)\sin\pi\alpha = a_n + (-1)^n b_n, \tag{2}$$

где

$$a_n = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\alpha t}{\sin t}\sin(2n-1)t\,dt, \quad b_n = \Big(\int\limits_0^1 \frac{t^{n-\alpha-1}-t^{n+\alpha-1}}{1+t}dt\Big)\sin\pi\alpha. \tag{3}$$

Во-вторых, для последовательностей (3) справедливы оценки

$$|a_n| \leqslant \frac{4}{2n-1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Big|\Big(\frac{\sin^2\alpha t}{\sin t}\Big)'\Big|dt, \quad |b_n| \leqslant \Big(\frac{1}{n-\alpha}-\frac{1}{n+\alpha}\Big)\sin\pi\alpha,$$

из которых следует

$$a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

что, в силу (2), и приводит к формуле (1).

Предложенное доказательство формулы (1) можно использовать как в обычном курсе математического анализа, так и на факультативных занятиях со студентами как альтернативное.