ГОМОТЕТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ ГРУППЫ ЛИ

М.Н. Подоксёнов

Витебский госуниверситет им. П.М. Машерова,

Московский пр-т 33, 210038 Витебск, Беларусь

geom@vsu.by

Преобразование f риманова или псевдориманова многообразия (M, g) называется гомотетией с коэффициентом e^{μ}, если $g_{f(p)}((f_*)_p X, (f_*)_p Y) = e^{2\mu t} g_p(X, Y)$ для любых векторов $X, Y \in T_p M$.

Существует с точностью до изоморфизма только одна трехмерная связная односвязная нильпотентная группа Ли. Это группа Гейзенберга Hs. Пусть g — левоинвариантная метрика на Hs сигнатуры $(+,+,-)$. Вопрос: допускает ли многообразие (Hs, g) гомотетические преобразования? Поставленная задача сводится к поиску преобразований, которые оставляют неподвижным единичный элемент группы. Метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle , \rangle$ в алгебре Ли $\mathcal{H}$ группы Hs. Алгебра Ли $\mathcal{H}$ имеет одномерный центр $\mathcal{Z}$.

Теорема 1. *Однородное пространство (Hs, g) допускает гомотетические преобразования, отличные от изометрий, тогда и только тогда, когда центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{H}$ является изотропным. Гомотетии, оставляющие неподвижной единицу группы, в подходящей корте на группе Ли Hs задаются одной из формул:*

$$x_1' = e^{3\mu t} x_1, \quad x_2' = \pm e^{2\mu t} x_2, \quad x_3' = \pm e^{\mu t} x_3 \tag{1}$$

$$x_1' = -e^{3\mu t} x_1, \quad x_2' = \pm e^{2\mu t} x_2, \quad x_3' = \mp e^{\mu t} x_3 \tag{2}$$

$\mu = \mathrm{const} > 0$, $t \in R$. *При этом, скалярное произведение и операция скобки в алгебре Ли $\mathcal{H}$ задаются соответственно равенствами равенствами $\langle E_1, E_3 \rangle = \langle E_2, \ E_2 \rangle = 1$, $[E_2, E_3] = E_1$ (остальные произведения раны нулю). Преобразования, действующие по формулам (1) со знаком " + ", образуют однопараметрическую группу гомотетий.*

В соответствии с [1], только такая метрика на Hs является плоской. Поэтому можно сказать, что однородное пространство (Hs, g) допускает гомотетические преобразования, отличные от изометрий, тогда и только тогда, когда метрика g является плоской. В этом случае группа всех гомотетий простратсва (Hs, g) является четырехмерной, а группа всех движений — трехмерной.

Если центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathcal{H}$ является времениподобным или пространственноподобным, то однородное пространство (Hs, g) допускает однопараметрическую группу изометрий $\{\Phi_t\}$, оставляющую неподвижной единицу группы. Получены формулы задающие действие $\{\Phi_t\}$ в каждом из случаев. Обозначим G — группу всех изометрий пространства (Hs, g), а G_e — ее стационарную подгруппу в единице $e \in Hs$. Тогда произвольный элемент $h \in G_e$ является композицией преобразования из $\{\Phi_t\}$ и симметрии определенного рода. Поэтому можно сказать, что группа движений однородного пространства (Hs, g) является четырехмерной, если центр $\mathcal{Z}$ алгебры Ли не является изотропным.

Литература

1. *Подоксенов М.Н.* Конформно плоские и эйнштейновы левоинвариантные метрики на трехмерных группах Ли // Ред. Сиб. матем. журн. Новосибирск, 1989. Деп в ВИНИТИ 14.11.1989, №6837-В89. 34 с.