ЧАСТИЧНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ В ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

В.Г. Найденко

Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
naidenko@im.bas-net.by

Введение. Прикладное значение классической теории выпуклости заключается в том, что она нередко позволяет разработать эффективные методы решения многих проблем. Однако требование выпуклости часто является слишком ограничительным, так как в практических задачах множества часто могут не удовлетворять условию выпуклости. Исследование прикладных проблем, таких как задачи синтеза СБИС, обработки изображений, проектирования баз данных и др., приводит к необходимости введения нетрадиционных понятий выпуклости, например, выпуклости по заданным направлениям, или частичной выпуклости. Цель исследования — установить экстремальные свойства решений оптимизационных проблем на частично выпуклых множествах.

Определения. Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ задано множество единичных векторов (направлений) $O \subseteq S^{n-1}$, где S^{n-1} — единичная сфера. Мы предполагаем симметричность множества O, т.е. $O = -O$, что не является ограничением в контексте частичной выпуклости. Прямая, параллельная какому-нибудь вектору из O, называется O-прямой. Напомним, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется частично выпуклым (O-выпуклым), если пересечение X с произвольной O-прямой связно или пусто. Семипространством S_x^o частичной выпуклости в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется максимальное по включению частично выпуклое множество не содержащее x. Семипространства частичной выпуклости вида $S_x^o \triangleq \mathbb{R}^n \setminus (x + C)$ называются C-семипространствами, где C — острый выпуклый конус.

Дадим определение OC-выпуклости. Семейство подмножеств OC из $\mathbb{R}^n$ образует OC-выпуклость, если OC содержит только следующие множества: 1) $\mathbb{R}^n$; 2) все C-семипространства O-выпуклости; 3) всевозможные пересечения между собой C-семипространств O-выпуклости. OC-выпуклую оболочку произвольного множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (т.е. пересечение всех OC-выпуклых множеств, содержащих A) обозначим через $\mathrm{conv}^{oc}[A]$. Точку $a \in A$ назовем OC-экстремальной для A, если $a \notin \mathrm{conv}^{oc}[A \setminus \{a\}]$. Совокупность всех OC-экстремальных точек для множества A обозначим как $\mathrm{ext}^{oc}[A]$.

Напомним из теории выпуклой оптимизации, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется квазивыпуклой, если для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ (классически) выпукло. По аналогии с обычными квазивыпуклыми функциями, функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ назовем OC-квазивыпуклой, если для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leqslant \alpha\}$ является OC-выпуклым.

Основной результат. Рассмотрим оптимизационную задачу относительно переменной $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) \to \max, \quad x \in A, \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и A — компакт в $\mathbb{R}^n$.

Нами доказана следующая

Теорема 1. *Если функция f OC-квазивыпукла и множество A является OC-выпуклым компактом, то при условии конечности или счетности множества направлений O частичной выпуклости во множестве* $\mathrm{ext}^{oc}[A]$ *найдется OC-экстремальная точка, которая является решением оптимизационной задачи (1).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф07-293).