

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕПОЧКАХ ТОДЫ С ДВУМЯ ЭКСПОНЕНТАМИ

М.В. Милованов, О.Г. Медведева

Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка,

Советская 18, 220050 Минск, Беларусь

mvmil@mail.ru, olga_medvedeva@tut.by

Определение 1. Обобщенной цепочкой Тоды называется гамильтонова система, которая в канонических переменных q, p ($\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$) задается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{k=1}^s c_k \exp(\alpha_k, q), \quad (1)$$

где q, p, α_k ($k = 1, \dots, s$) — n -мерные векторы, c_k — произвольные постоянные, а (α_k, q) — стандартное скалярное произведение в R^n .

Системы такого вида часто встречаются в приложениях [1]. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — произвольный набор векторов в R^n , то о таких гамильтоновых системах мало что известно.

Обычная (непериодическая) цепочка Тоды — это система n взаимодействующих частиц на прямой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + c^2 \sum_{i=1}^{n-1} \exp[2(q_i - q_{i+1})], \quad (2)$$

где c — некоторая константа. Ее полная интегрируемость была доказана в 1974 г. [2]. С тех пор цепочка (2) стала объектом исследований многих математиков и физиков. Особенно детально была изучена простейшая система из трех частиц, которая демонстрирует почти все характерные черты системы из многих частиц. В 1976 г. О.И. Богоявленским было показано, как можно построить интегрируемую систему вида (1) по системе корней $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ произвольной простой алгебры Ли [2, 3]. При этом обычная цепочка Тоды (2) связана с алгеброй Ли $sl(n, R)$, а ее фазовое пространство естественно отождествляется с орбитой коприсоединенного представления группы треугольных матриц из $SL(n, R)$ со стандартной симплектической структурой на этой орбите.

Нами доказана следующая

Теорема 1. *С помощью подходящего канонического преобразования интегрирование обобщенной цепочки Тоды с гамильтонианом*

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2) + c_1^2 \exp(\beta_1 q_1 + \dots + \beta_n q_n) + c_2^2 \exp(\gamma_1 q_1 + \dots + \gamma_n q_n), \quad (3)$$

где c_1, c_2 — произвольные константы, сводится к интегрированию одного дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\lambda - \frac{1}{k} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right) \left(\frac{k}{y} - \frac{2y}{C - y^2 - x^2} \right),$$

где λ, k и C — некоторые константы.

Отметим, что гамильтониан непериодической цепочки Тоды из трех частиц имеет вид (3).

Литература

1. Козлов В.В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995.
2. Переломов А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.
3. Борисов А.В., Мамаев И.С. Современные методы теории интегрируемых систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.