

ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

А.Д. Медных

Институт математики СО РАН, Новосибирский госуниверситет, 630090 Новосибирск, Россия
mednykh@math.nsc.ru

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. Вероятно, первый результат в данном направлении принадлежит Тартальи (Tartaglia, 1499–1557), который нашел объем евклидова тетраэдра. В настоящее время этот результат известен как формула Кэли — Менгера. И.Х. Сабитов (1996) доказал, что объем любого евклидова многогранника — это корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются целочисленными многочленами, зависящими от длин ребер многогранника и его комбинаторного типа.

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Формула объема для бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) известна еще со времен Н. И. Лобачевского и Л. Шлефли. Объем куба Ламберта и некоторых других многогранников получены Р. Келлерхальц (1989), Д. А. Деревниным и А. Д. Медных (2002), А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Дж. Паркером (2004) и другими. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э. Б. Винбергом (1988).

Общая формула для объема гиперболического тетраэдра долгое время оставалась неизвестной. Несколько лет назад Ю. Чо, Х. Ким (1999), Дж. Мураками, У. Яно (2005) и А. Ушиджима (2003) добились успеха, установив такую формулу. Д. А. Деревнин, А. Д. Медных (2005) предложили элементарную интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра. Отметим, что если многогранник обладает какой либо нетривиальной симметрией, то формула для его объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским (1904) для идеального гиперболического тетраэдра. Дж. Милнор (1982) представил соответствующий результат в весьма элегантной форме. В общем случае, объем неевклидова тетраэдра с симметриями был найден Д. А. Деревниным, А. Д. Медных и М. Г. Пашкевич (2004).

Удивительно, что более ста лет назад, в 1906 г., итальянский герцог Гаетано Сфорца нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. Этот факт приобрел известность после дискуссии автора с Хосе Монтезиносом на конференции в Эль Бурго д'Осма (Испания) в августе 2006 г. К сожалению, выдающаяся работа Сфорца до этого времени была полностью забыта.

В настоящем докладе излагается общий подход к вычислению объемов многогранников, обладающих нетривиальной симметрией и даются его приложения к теории узлов и зацеплений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-01-00153).