АДДИТИВНАЯ МЕТРИКА И ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО

М.В. Куркина, В.В. Славский

Югорский государственный университет, Институт прикладной математики информатики и управления,

Чехова 15, 628011 Ханты-Мансийск, Россия

mavi@inbox.ru, slavsky@uriit.ru

Определение 1. Аддитивной метрикой на множестве X называется неотрицательная функция $\rho : X \times X \to R^+$ такая, что:

1) $\rho_{ij} = \rho_{ji}, \ \forall i, j \in X$;
2) $\rho_{ij} + \rho_{ks} \leqslant \max\{\rho_{ik} + \rho_{js}, \rho_{kj} + \rho_{is}\}, \ \forall i, j, k, s \in X$;
3) $\rho_{ij} = 0 \Leftrightarrow i = j$.

Справедлива теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\{X, \rho\}$ *конечное множество с аддитивной метрикой, тогда существует отображение* $F : X \to M^n$ *множества* X *в псевдоевклидово пространство Минковского* M^n *такое, что* $||F(x_i) - F(x_j)|| = \exp[\rho_{ij}], \ i \neq j$, *причем* $F[X]$ *лежит в изотропном конусе пространства* M^n, n *— число элементов множества* X.

Доказательство. Существует преобразование Фарриса [1] аддитивной метрики в ультраметрику:

$$\hat{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \lambda_i + \lambda_j, \quad i \neq j.$$

Пространство $\{X, \bar{\rho}\}$ ультраметрическое, т.е выполняется $\hat{\rho}_{ij} \leqslant \max\{\hat{\rho}_{ik}, \hat{\rho}_{kj}\} \ \ \forall i, j, k \in X$. Для любой строго монотонно возрастающей числовой функции $\psi : R^+ \to R^+$ функция $\psi(\hat{\rho}_{ij})$ также ультраметрика. Ультраметрическое пространство $\{X, \exp[\hat{\rho}_{ij}]\}$ изометрично вкладывается в евклидово пространство R^{n-1} в виде подмножества сферы [2], следовательно существует изометричное вложение $f : \{X, \exp[\hat{\rho}_{ij}]\} \to M^n$ в пространство Минковского в виде подмножества изотропного конуса M^n. Положим $F(x_i) = f(x_i)e^{-\lambda_i}$, тогда

$$||F(x_i) - F(x_j)|| = ||f(x_i) - f(x_j)|| \exp(-\lambda_i - \lambda_j) = \exp[\hat{\rho}_{ij}] \exp(-\lambda_i - \lambda_j) = \exp[\rho_{ij}].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-81002-Бел_а).

Литература

1. *Bandelt H.-J.* Recognition of tree metrics // SIAM Journal of Discrete Mathematics. 1990. V. 3. P. 1–6.

2. *Berestrovskii V.N.* Ultrametric spaces // Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodop'ianov, ed.). Sobolev Institute Press, Novosibirsk. 2001. P. 47–72.