

О КРИВИЗНЕ РИЧЧИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

А.Г. Кремлев, Ю.Г. Никоноров

Рубцовский индустриальный институт,
ул. Тракторная, 2/6, Рубцовск, 658207, Россия
kremant@mail.ru, nik@inst.rubtsovsk.ru

Хорошо известно, что различные ограничения на кривизну риманова многообразия позволяют получить информацию о его геометрическом и топологическом строении. Для заданного однородного пространства G/H (где H — компактная подгруппа группы Ли G) естественно попытаться отыскать общие свойства операторов Риччи для всевозможных G -инвариантных римановых метрик на пространстве G/H . Эту проблему можно уточнить и

конкретизировать разными способами. Один из возможных вариантов -- рассмотреть следующий вопрос: каковы возможные сигнатуры операторов Риччи G -инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H ?

Есть основания надеяться на то, что для пространств малой размерности этот вопрос может быть полностью разрешен. Благодаря работе Дж. Милнора [6] мы знаем ответ на этот вопрос в размерности ≤ 3 . Работы [5, 4, 7] дают ответ на поставленный вопрос для всех четырехмерных однородных пространств, отличных от групп Ли. В частности, в процитированных работах показано, что произвольное односвязное однородное риманово многообразие размерности ≤ 4 является либо симметрическим пространством, либо группой Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Каждое односвязное симметрическое пространство является прямым метрическим произведением евклидова пространства и неприводимых симметрических пространств, при этом неприводимые симметрические пространства являются эйнштейновыми (т. е. имеют постоянную кривизну Риччи). Таким образом, проблема определения сигнатуры оператора Риччи на симметрических пространствах имеет очевидное решение. Гораздо более интересной является проблема определения возможных сигнатур оператора Риччи левоинвариантных метрик на заданной группе Ли.

В работах авторов [1] и [2] дается исчерпывающий ответ на вопрос о реализуемости заданной сигнатуры в качестве сигнатуры оператора Риччи некоторой левоинвариантной метрики на данной четырехмерной группе Ли. Основным методом исследования является применение аппарата метрических алгебр Ли и классификации вещественных четырехмерных алгебр Ли, полученной Г.М. Мубаракзяновым [3].

Работа выполнена при поддержке Совета по ведущим научным школам Российской Федерации (грант НШ-5682.2008.1).

Литература

1. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Математические труды (в печати).
2. Кремлев А.Г., Никоноров Ю.Г. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Препринт, 2008.
3. Мубаракзянов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1963. Т. 32, № 1. С. 114–123.
4. Berard-Bergery L. Les espaces homogenes Riemanniens de dimension 4, Semin. Arthur Besse, Paris., 1978/79, (1981). P. 40–60.
5. Ishihara S. Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions // J. Math. Soc. Japan. 1955. V. 7 P. 345–370.
6. Milnor J. Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.
7. Patrangenaru V. Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triple // Pacific J. Math. 1996. V. 173, N. 1. P. 511–532.