О СВОЙСТВАХ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ, РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП В ТЕРМИНАХ КАТЕГОРИЙ.

А.А. Борубаев [1], **Т.Дж. Касымова** [2]

[1] Национальная аттестационная комиссия Кыргызской Республики,

Эркиндик 2, Бишкек, Кыргызская Республика

[2] Кыргызский национальный университет им. Ж Баласагына,
факультет математики, информатики и кибернетики,

Абдымомунова 238, 720031, Бишкек, Кыргызская Республика
tumar2000@mail.ru

Посредством абсолютной замкнутости найдена категорная характеристика компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп, что является решением задачи, поставленной З. Фроликом в 1983 г. на семинаре по топологии в Карловском университете (г. Прага).

Найти категорную характеристику компактных и полных пространств.

Известно, что хаусдорфова топологическая группа G называется *полной по Райкову*, если G полна относительно ее двусторонней равномерности.

Хаусдорфово равномерное пространство (X, U) называется *абсолютно замкнутым*, если (X, U) замкнуто в каждом хаусдорфовом равномерном пространстве, содержащем его в качестве подпространства.

1. Для того чтобы топологическое пространство было компактным необходимо и достаточно, чтобы оно было абсолютно замкнутым пространством [1].

2. Для того чтобы равномерное пространство было полным необходимо и достаточно, чтобы оно было абсолютно замкнутым равномерным пространством.

3. Для того чтобы топологическая группа была полной по Райкову необходимо и достаточно, чтобы она была абсолютно замкнутой топологической группой [2].

Ниже дан ответ на выше поставленную задачу З.Фролика (теорема 1), а также дана категорная характеристика полных равномерных пространств (теорема 5) и полных по Райкову топологических групп (теорема 6).

Следующее определение в заметке играет ключевую роль.

Определение 1. Пусть K — произвольная категория, A — некоторый класс морфизмов категории K. Объект X категории K называется *A-замкнутым*, если каждый морфизм $f : X \to Y$ для произвольного объекта Y, принадлежит классу A.

Термин A-замкнутость введен в связи с выше приведенными утверждениями 1–3.

Теорема 1. *Пусть K — категория топологических пространств и непрерывных отображений, а A — класс совершенных отображений. Для того чтобы топологическое пространство* X *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы объект* X *категории K был A-замкнутым.*

Теорема 2. *Пусть K — категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, а A — класс равномерно совершенных отображений. Для того чтобы равномерное пространство* (X, U) *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы объект* (X, U) *категории K был A-замкнутым.*

Следующая теорема является категорной версией хорошо известного факта: компактные пространства и только они являются неуплотняемыми (в заметке все пространства предполагаются вполне регулярными).

Теорема 3. *Пусть K — категория, объектами которой служат топологические пространства, а морфизмами — уплотнения. Пусть A — класс гомеоморфизмов. Тогда пространство* X *является компактным тогда и только тогда, когда объект* X *является A — замкнутым.*

Теорема 4. *Пусть K — категория топологических пространств и непрерывных отображений, а A — класс замкнутых отображений. Тогда пространство* X *является компактным тогда и только тогда, когда объект* X *является A - замкнутым.*

Теорема 5. *Пусть K — категория равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений, а A — класс полных равномерно непрерывных отображений. Для того чтобы равномерное пространство* (X, U) *было полным, необходимо и достаточно, чтобы объект* (X, U) *категории K был A-замкнутым.*

Теорема 6. *Пусть K — категория топологических групп и непрерывных гомоморфизмов, являющихся равномерно непрерывными и полными, относительно двусторонних равномерностей топологических групп. Для того чтобы топологическая группа G было полным по Райкову, необходимо и достаточно, чтобы объект G категории K был A-замкнутым.*

Теорема 7. *Пусть K — категория топологических пространств и непрерывных отображений, A — класс отображений, являющихся равномерно непрерывными и полными, относительно максимальных равномерностей.*

Для того чтобы пространство X *было полным по Дьедонне, необходимо и достаточно, чтобы объект* X *категории K был A-замкнутым.*

Замечание 1. Пусть K — категория топологических пространств и непрерывных отображений, A — класс открытых, (факторных) отображений. Тогда какие топологические пространства являются A-полными?

Аналогичную задачу можно поставить в категории равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений относительно класса равномерно замкнутых (открытых, факторных) отображений.

Литература

1. *Александров П.С., Урысон П.С.* Мемуары о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971.

2. *Граев М.И.* Теория топологических групп // Успехи матем. наук. 1950. Вып. 5, № 2. С. 3–56.