АНАЛОГИ УРАВНЕНИЯ ПОЛЛАЧЕКА – ХИНЧИНА ДЛЯ СИСТЕМ ПОЛЛИНГА

Г. К. Мишкой

Независимый международный университет Молдовы
Кишинев, Молдова
E-mail: gmiscoi@ulim.md

Модели Поллинга играют важную роль в анализе и моделировании различных прикладных проблем. В частности, они находят широкое применение для проектирования широкополосных беспроводных сетей [1]. В работе рассматривается модель Поллинга с исчерпывающей дисциплиной и полумарковским переключением между очередями [2]. Для данной модели приведены распределение периода занятости для *к*-й очереди, распределение нестационарной и стационарной длины очереди и др. характеристики. Показано, что уравнения для длины очереди могут быть представлены как аналоги известного уравнения Поллачека – Хинчина [3, 4].

Ключевые слова: модель Поллинга, исчерпывающая дисциплина, полумарковское переключение, длина очереди.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ

Рассматривается модель Поллинга с исчерпывающей дисциплиной и с очередями типа $\mathrm{M_r} \,|\, \mathrm{G_r} \,|\, 1$. В *k*-ую очередь поступает пуассоновский поток с параметром λ_k. Времена обслуживания заявок в *k*-й очереди независимы и одинаково распределены с функцией распределения $B_k(x)$. На переключение к *k*-й очереди затрачивается время C_k с функцией распределения $C_k(x)$. Ниже приведены некоторые результаты анализа данной модели, в том числе распределение периода занятости для *k*-й очереди, распределение длины очереди, вероятности состояния и др. Результаты получены в терминах преобразований Лапласа, Лапласа – Стилтьеса и производящих функций. Под периодом занятости для k-й очереди, или k-периодом, будем понимать промежуток времени начинающийся с переключения сервера на k-очередь и завершающийся моментом времени, когда система становится свободной от заявок класса k. Обозначим через $\Pi_k^\delta(x)$ функцию распределения k-периода, а через $\pi^\delta(s)$ – преобразование Лапласа – Стилтьеса этой функции.

Теорема 1. Функция $\pi^\delta(s)$ определяется из уравнения

$$\pi_k^\delta = c_k(s+\lambda_k-\lambda_k\pi_k(s))\pi_k(s), \tag{1.1}$$

где

$$\pi_k = \beta_k(s+\lambda_k-\lambda_k\pi_k(s)), \tag{1.2}$$

а

$$c_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dC_k(x)\,,\ \beta_k(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dB_k(x)\,.$$

Обозначим через π_{k1}^δ первый момент k-периода.

Теорема 2. Если $\lambda_k\beta_k<1$, $\lambda_k c_{k1}<1$, тогда

$$\pi_{k1}^\delta=\frac{\beta_{k1}}{1-\lambda_k\beta_{k1}}+\frac{c_{k1}}{1-\lambda_k c_{k1}}\,,$$

где

$$\beta_{k1}=\int_0^\infty x dB_k(x) \ \text{ и } \ c_{k1}=\int_0^\infty x dC_k(x).$$

ВЕРОЯТНОСТИ СОСТОЯНИЙ

Обозначим через $P_{B_k}(t)$, $P_{C_k}(t)$, $P_0(t)$ вероятности того, что система находится в состоянии обслуживания заявки очереди *к,* переключения к очереди *к,* в свободном состоянии соответственно. Через $p_{B_k}(s)$, $p_{C_k}(s)$, $p_0(s)$ обозначим преобразования Лапласа названных вероятностей.

Теорема 3. Функции $p_{B_k}(s)$, $p_{C_k}(s)$ и $p_0(s)$ определяются из следующих выражений:

$$p_{B_k}(s)=\frac{\lambda_k[1-\pi_k(s)]}{s[s+\lambda_k-\lambda_k\pi_k^\delta(s)]},$$

$$p_{C_k}(s)=\frac{\lambda_k[1-c_k(s)]}{s[s+\lambda_k-\lambda_k\pi_k^\delta(s)]},$$

$$p_0(s)=\frac{1}{s}-[p_{B_k}(s)+p_{C_k}(s)],$$

где $\pi_k^\delta(s)$ и $\pi_k(s)$ определяются из (1.1) и (1.2).

Обозначим через $P_{B_k}(t)$, $P_{C_k}(t)$, $P_0(t)$ стационарные вероятности состояния соответственно. Теорема 3 позволяет найти стационарные вероятности состояния.

Действительно, известно, что если существует $\lim\limits_{s\downarrow\infty} A(t)$ и $\alpha(s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}A(t)dt$, тогда $\lim\limits_{s\downarrow\infty} A(t)=\lim\limits_{s\downarrow 0} s\alpha(s)$.

Теорема 4. Если $\lambda_k\beta_k<1$, $\lambda_k c_{k1}<1$, тогда

$$P_{B_k}=\lim_{s\downarrow 0} sp_{B_k}(s),\ P_{C_k}=\lim_{s\downarrow 0} sp_{C_k}(s),\ P_0=\lim_{s\downarrow 0} sp_0\ (s)$$

и

$$P_{B_k}=\frac{\lambda_k\pi_{k1}}{1+\lambda_k\pi_{k1}^\delta},\quad P_{C_k}=\frac{\lambda_k c_{k1}}{1+\lambda_k\pi_{k1}^\delta},\ P_0=1-\frac{\lambda_k(c_{k1}+\pi_{k1})}{1+\lambda_k\pi_{k1}^\delta},$$

где π_{k1}, π_{k1}^δ являются моментами первого порядка, $\pi_{k1}=\int\limits_0^\infty xd\Pi_k(x)$ и $\pi_{k1}^\delta=\int\limits_0^\infty xd\Pi_k^\delta(x)$.

ВИРТУАЛЬНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ПОЛЛАЧЕКА – ХИНЧИНА

Обозначим через $P_{km}(t)$ вероятность, что в момент времени t в k-й очереди находятся m заявок. Пусть $P_k(z,t)$ есть производящая функция этих вероятностей, $P_k(z,t)=\sum\limits_{k=1}^\infty P_k(t)z^k, 0\le z\le 1$, а $p_k(z,s)=\int\limits_0^\infty e^{-st}P_k(z,t)dt$ – ее преобразование Лапласа.

Теорема 5.

$$p_k(z,s)=\frac{1+\lambda_k\pi_k^\delta(z,s)}{s+\lambda_k-\lambda_k z}, \tag{3.1}$$

$$\pi_k^\delta(z,s)=\frac{1-c_k(s+\lambda_k-\lambda_k z)}{s+\lambda_k-\lambda_k z}+\frac{\beta_k(z,s)[zc_k(s+\lambda_k-\lambda_k z)-\pi_k^\delta(s)]}{z-\beta_k(s+\lambda_k-\lambda_k z)}, \tag{3.2}$$

$$\beta_k(z,s)=\frac{1-\beta_k(s+\lambda_k-\lambda_k z)}{s+\lambda_k-\lambda_k z}.$$

СТАЦИОНАРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ПОЛЛАЧЕКА – ХИНЧИНА

Теорема 6. Если $\lambda_k\beta_k<1$, $\lambda_k c_{k1}<1$, тогда

$$P_k(z)=\lim_{s\downarrow\infty} P_k(z,t)=\lim_{s\downarrow 0} sp_k(z,s)$$

и

$$P_k(z)=\frac{1+\lambda_k\pi_k^\delta(z,0)}{1+\lambda_k\pi_{k1}^\delta}. \tag{4.1}$$

Функция $\pi_k^\delta(z,0)$ определяется из (3.2) для $s=0$, а π_{k1}^δ из теоремы 2.

ВЫВОДЫ И КОММЕНТАРИИ

Если положить переключения $C_k=0$ и число очередей $k=1$, то из (4.1) следует

$$P_1(z)=P(z)=\frac{\beta(\lambda-\lambda z)(z-1)(1-\lambda\beta_1)}{z-\beta(\lambda-\lambda z)}. \tag{5.1}$$

Формула (5.1) известна как уравнение Поллачека – Хинчина. Она была получена Поллачеком [3] и Хинчиным [4] для классической модели $M|G|1$. Таким образом, представленные выше результаты (Теорема 5 и Теорема 6) могут быть рассмотрены как аналог (виртуальный и стационарный) известного классического уравнения Поллачека – Хинчина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишневский, В. М.* Системы Поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях / В. М. Вишневский, О. В. Семенова. М.: Техносфера, 2007. 309 с.
2. *Мишкой, Г.* Обобщенные приоритетные системы / Г. Мишкой. Кишинев, Штиинца, 2009. 200 с.
3. *Pollaczek, F.* Problemes stochasticues poses par le phenomene de formation d'une queue d'attente a un guichet et par phenomenes apparentes / F. Pollaczek. Paris: Gauthier – Villars. Memorial de Sciences Mathematiques. № 136, 1957.
4. *Хинчин, А. Я.* Математические методы теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1955. Т. 49. С. 1–123.

,